فهرست مطالب

ریاضی و آمار ۱

پایه دهم

پایهٔ دهم

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

ابتدا ببینیم معادله چیه، جواب یا ریشهٔ معادله به چی میگن و انواع معادلاتی که قراره تو این فصل بخونیم چیا هستن.

معادله

به هر تساوی که در آن مجهول (متغیر) وجود دارد و به ازای بعضی مقادیر برای آن مجهول، تساوی برقرار است، معادله می‌گویند. مثلاً هر یک از تساوی‌های $۳x = ۶$ ، $۲x^۲ + ۴x = ۰$ و $\frac{x}{۲} + \frac{۱}{x-۱} = ۲x$ ، یک معادله هستند.

جواب یا ریشهٔ معادله

به عدد یا عددهایی که به‌جای مجهول قرار می‌گیرند و معادله را به یک تساوی عددی درست تبدیل می‌کنند، جواب یا ریشهٔ معادله می‌گوییم. مثلاً در معادلهٔ $۳x = ۶$ ، اگر $x = ۴$ باشد، آن‌گاه تساوی به‌صورت $۳(۴) = ۶$ در می‌آید که نادرست است زیرا $۱۲ \neq ۶$ می‌باشد پس $x = ۴$ جواب معادله نیست، امّا اگر به‌جای مجهول x عدد ۲ را قرار دهیم، به یک تساوی درست می‌رسیم، پس $x = ۲$ جواب معادله یا ریشهٔ معادله است.

حل معادله

منظور از حل یک معادله به‌دست آوردن جواب یا جواب‌های معادله است.

در این فصل با سه نوع از معادلات به نام‌های **معادلهٔ درجهٔ‌اول**، **معادلهٔ درجهٔ دوم** و **معادلهٔ گویا** آشنا می‌شویم.

معادلهٔ درجهٔ اول

هر معادله به‌صورت $ax + b = ۰$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است را معادلهٔ درجهٔ اول می‌نامند.

مثلاً معادلهٔ $۳x - ۴ = ۰$ یک معادلهٔ درجهٔ اول است. *(در معادلهٔ درجهٔ اول توان متغیر x برابر یک است)* امّا معادلات $۲x^۲ + ۵x = ۳$ *(توان x برابر ۲ است)*، $x + \frac{۲}{x} = ۳$ *(x در مخرج کسر اومده)* و $۲|x| - ۴ = ۰$ *(x داخل قدرمطلق قرار گرفته)* درجهٔ اول نیستند.

حل معادلهٔ درجهٔ اول

معادلهٔ درجهٔ اول $ax + b = ۰$ در صورتی که a مخالف صفر باشد *(اگر $a = ۰$ بشه، x از معادله حذف می‌شه)* همواره یک جواب دارد.

برای حل آن، جملهٔ دارای مجهول یعنی ax را در همان سمتی که هست نگه داشته و عدد b را به طرف دیگر تساوی می‌بریم *(حواست هست که وقتی b رو می‌بری اون سمت تساوی باید علامتش رو قرینه کنی؟)* حال با تقسیم طرفین معادله بر ضریب x یعنی عدد a، مقدار x که همان جواب یا ریشهٔ معادله است، به دست می‌آید.

$$ax + b = ۰ \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

مثلاً جواب معادلهٔ $۳x + ۵ = ۵$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۳x + ۵ = ۰ \Rightarrow ۳x = -۵ \xRightarrow{\div ۳} x = \frac{-۵}{۳}$$

+۵ رفت اونور شد ۵−

توجه مطمئناً انتظار ندارید که در کنکور، معادلهٔ درجهٔ اول را به‌صورت $ax + b = ۰$ بدهند و از شما جواب معادله را بخواهند *(فدایی قیلی آسون میشه)*. معمولاً با معادله‌ای سروکار دارید که چند تا جمع و تفریق و ضرب نیاز دارد تا در نهایت به فرم $ax + b = ۰$ در آید و یا ممکن است معادله شامل کسرهایی باشد که باید با ضرب طرفین معادله در یک عدد مناسب *(عدد مناسب عددیه که همهٔ کسرها رو از بین می‌بره. همون کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌هاست.)* کسرها را از بین ببریم.

❓ جواب معادلهٔ $2(1-x)-3(x+1)=14$ کدام است؟

۱) -4　　۲) -3　　۳) -2　　۴) -1

گزینهٔ ۲ ابتدا کاری می‌کنیم که در معادله فقط یک‌بار x دیده شود: (اینجوری بشه $ax+b=0$)

$$2(1-x)-3(x+1)=14\Rightarrow 2-2x-3x-3=14\Rightarrow -5x-1=14\Rightarrow -5x=14+1\Rightarrow -5x=15\Rightarrow x=\frac{15}{-5}=-3$$

نکته جواب هر معادله، در خود معادله صدق می‌کند، یعنی با قرار دادن جواب معادله در معادله، به یک تساوی عددی درست می‌رسیم.
حالا با این جمله می‌شود دو کار مهم کرد:

۱ اگر جواب معادله در گزینه‌های تستی داده شده بود می‌توان گزینه‌ها را در معادله جای‌گذاری کرد، هر کدام صدق کرد همان جواب معادلهٔ سؤال است. (این کار بعضی اوقات طولانی‌تره. امّا باید به‌عنوان یه ابزار حل بلد باشیم) مثلاً حل تمرین قبلی را با این روش ببینید:

$1)\ x=-4\Rightarrow 2(1-(-4))-3(-4+1)=14\Rightarrow 2(5)-3(-3)=14\Rightarrow 10+9=14\Rightarrow 19=14$ ✗

$2)\ x=-3\Rightarrow 2(1-(-3))-3(-3+1)=14\Rightarrow 2(4)-3(-2)=14\Rightarrow 8+6=14\Rightarrow 14=14$ ✓

بنابراین $x=-3$ جواب معادله است و نیازی به بررسی گزینه‌های (۳) و (۴) نیست.

۲ تست‌هایی مثل مثال زیر که مجهول دیگری غیر از x دارند، می‌توانند شما را مجبور به استفاده از مفهوم «جواب هر معادله در خود معادله صدق می‌کند» کنند. در این گونه سؤال‌ها یک معادلهٔ جدید از دل معادله به‌دست می‌آید که باید آن را حل کنید و مجهول دیگر را به‌دست آورید.

❓ اگر $x=-4$ جواب معادلهٔ $mx+\frac{x}{4}=-3m$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -3　　۲) -2　　۳) -1　　۴) 1

گزینهٔ ۳ جواب معادله، در معادله صدق می‌کند. پس به جای تمام x ها عدد -4 را قرار می‌دهیم:

$$m(-4)+\frac{(-4)}{4}=-3m\Rightarrow -4m-1=-3m\Rightarrow -1=-3m+4m\Rightarrow -1=m\Rightarrow m=-1$$

نکته وقتی گفته می‌شود دو معادله ریشهٔ مشترک دارند، باید ریشهٔ یک معادله را به‌دست آورید و در دیگری جای‌گذاری کنید.

❓ دو معادلهٔ $2(x-3)+3x=4(x-1)$ و $\frac{x+m}{2}+\frac{x+1}{2}=m+1$ جواب مشترک دارند. مقدار m کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

گزینهٔ ۲ وقتی دو معادله جواب مشترک دارند، یعنی جواب معادلهٔ $2(x-3)+3x=4(x-1)$، جواب معادلهٔ $\frac{x+m}{2}+\frac{x+1}{2}=m+1$ نیز هست، پس ابتدا جواب معادلهٔ $2(x-3)+3x=4(x-1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$2x-6+3x=4x-4\Rightarrow 5x-6=4x-4\Rightarrow 5x-4x=-4+6\Rightarrow x=2$$

حال $x=2$ را در معادلهٔ $\frac{x+m}{2}+\frac{x+1}{2}=m+1$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار m معلوم شود:

$$\frac{2+m}{2}+\frac{2+1}{2}=m+1\xRightarrow{\times 2}2+m+3=2m+2\Rightarrow 5+m=2m+2\Rightarrow 5-2=2m-m\Rightarrow 3=m\Rightarrow m=3$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک آگه یادت نیومد، اول یادآوری زیر رو بخون، بعد برو سراغ تست بعدی.

یادآوری کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b یا ک. م. م دو عدد a و b، کوچک‌ترین عددی است که بر هر دو عدد a و b بخش‌پذیر است. یکی از مهم‌ترین کاربردهای ک.م.م در پیداکردن مخرج مشترک دو کسر است. در اینجا ما از ک. م. م برای از بین بردن مخرج کسرهای معادله استفاده می‌کنیم.

❓ جواب معادلهٔ $\frac{1-x}{6}+\frac{x+3}{2}=\frac{2x}{3}$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۵　　۴) ۶

گزینهٔ ۳ برای آن‌که از شر مخرج‌ها خلاص شویم، کافی است طرفین معادله را در ۶ ضرب کنیم: (۶ کوچک‌ترین عددیه که هم بر ۲، هم بر ۳ و هم بر ۶ بخش‌پذیره)

$$6\times\left(\frac{1-x}{6}+\frac{x+3}{2}\right)=6\times\frac{2x}{3}\Rightarrow 1-x+3(x+3)=4x\Rightarrow 1-x+3x+9=4x\Rightarrow 2x+10=4x$$

$$\Rightarrow 10=4x-2x\Rightarrow 10=2x\Rightarrow x=\frac{10}{2}\Rightarrow x=5$$

معادلات درجهٔ اول غیرعادی

۱ بعضی اوقات ظاهر معادله، درجه اول نیست امّا با ساده کردن معادله، تمام xهایی که توان غیر یک دارند، با هم ساده می‌شوند و معادله به یک معادلهٔ درجهٔ اول تبدیل می‌شود و جواب معادله به‌راحتی معلوم می‌شود (در یک کلام، از ظاهر معادله نترسید، شاید فیل تو خالی باشه)

جواب معادلهٔ $x(x+۲)-۲=x^۲-۳(x-۱)$ با جواب کدام معادله برابر است؟

۱) $-x+۲=۳$ ۲) $۳x+۶=۰$ ۳) $۲x-۴=۰$ ۴) $-۳x+۳=۰$

گزینهٔ ۴ ابتدا با انجام دادن ضرب‌ها و جمع و تفریق‌ها معادله را مرتب می‌کنیم، شاید معادله ساده‌تر از ظاهرش شود:

$$x(x+۲)-۲=x^۲-۳(x-۱)\Rightarrow \cancel{x^۲}+۲x-۲=\cancel{x^۲}-۳x+۳\xrightarrow[\text{ساده می‌شود.}]{x^۲\text{ از طرفین تساوی}}۲x+۳x=۳+۲\Rightarrow ۵x=۵\Rightarrow x=۱$$

بنابراین جواب معادله $x=۱$ است. حال باید بررسی کنیم که $x=۱$ جواب کدام گزینه است. برای این کار $x=۱$ را در تک تک معادله‌ها جای‌گذاری می‌کنیم تا ببینیم در کدام صدق می‌کند. واضح است که $x=۱$ فقط در معادلهٔ $-۳x+۳=۰$ صدق می‌کند.

۲ گاهی بعد از ساده‌سازی معادله، تمام xها با هم ساده می‌شوند (دیگر هیچ x ای در معادله نیست). حال دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) اگر بعد از ساده شدن xها به یک تساوی همیشه درست رسیدیم (مثلاً به تساوی ۳ = ۳ رسیدیم)، معادله بی‌شمار جواب دارد.

ب) اگر بعد از ساده شدن xها به یک تساوی همیشه نادرست رسیدیم (مثلاً به ۳ = ۲ رسیدیم)، معادله جواب ندارد.

معادلهٔ $m(x+۲)=-۲x+۵$ جواب ندارد. مقدار m کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

گزینهٔ ۳ برای آن‌که معادلهٔ درجهٔ اول جواب نداشته باشد، باید x در معادله نباشد، پس:

$$m(x+۲)=-۲x+۵\Rightarrow mx+۲m=-۲x+۵\Rightarrow m=-۲$$

باید با هم ساده شوند.

ثانیاً به‌ازای $m=-۲$، معادله به تساوی نادرست تبدیل شود که در اینجا به‌ازای $m=-۲$ به تساوی نادرست $-۴=۵$ می‌رسیم پس قطعاً معادله جواب ندارد.

معادلهٔ $(m+۱)(x-۳)=-۴x+n+۲$ بی‌شمار جواب دارد. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) -۱۰ ۴) ۱۰

گزینهٔ ۲ اولاً باید x در معادله حضور نداشته باشد، پس:

$$(m+۱)(x-۳)=-۴x+n+۲\Rightarrow (m+۱)x-۳(m+۱)=-۴x+n+۲\Rightarrow m+۱=-۴\Rightarrow m=-۵$$

باید با هم ساده شوند.

ثانیاً باید بعد از این‌که x حذف شد، یک تساوی همیشه درست داشته باشیم، پس:

$$-۳(m+۱)=n+۲\xrightarrow{m=-۵}-۳(-۵+۱)=n+۲\Rightarrow -۳(-۴)=n+۲\Rightarrow ۱۲=n+۲\Rightarrow ۱۲-۲=n\Rightarrow n=۱۰$$

بنابراین $m+n$ برابر $-۵+۱۰=۵$ می‌باشد.

کاربرد معادلهٔ درجهٔ اول در حل مسائل توصیفی

گاهی یک مسئله را به‌صورت توصیفی بیان می‌کنند و مقدار مجهولی را از ما می‌خواهند. در این‌گونه مسائل باید مقدار مجهول را x فرض کرده و با توجه به صورت سؤال، ارتباط x را با دیگر فرض‌های مسأله بنویسیم. معادلهٔ حاصل، یک معادلهٔ درجه اول است که با حل آن مقدار مجهول، معلوم می‌شود.

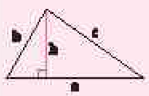
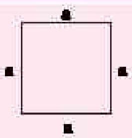
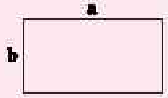
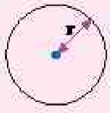
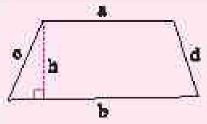
دو برابر عددی به علاوهٔ یک، مساوی پنج برابر همان عدد منهای چهار می‌باشد. آن عدد کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

گزینهٔ ۱ عدد موردنظر را x فرض می‌کنیم. دو برابر عدد به علاوهٔ یک، یعنی $۲x+۱$ و هم‌چنین پنج برابر همان عدد منهای چهار، یعنی $۵x-۴$. حال این دو با هم برابرند، پس $۲x+۱=۵x-۴$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$۲x+۱=۵x-۴\Rightarrow ۱+۴=۵x-۲x\Rightarrow ۵=۳x\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

نکته ممکن است ارتباط مجهول با فرض‌های دیگر مسأله، در قالب یک مفهوم هندسی بیان شود. موارد زیر را به خاطر بسپارید.

نام	مثلث	مربع	مستطیل	دایره	ذوزنقه
شکل					
محیط	$a+b+c$	$4a$	$2(a+b)$	$2\pi r$	$a+b+c+d$
مساحت	$\frac{1}{2}a\times h$	a^2	ab	πr^2	$\frac{1}{2}(a+b)\times h$

طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ واحد بیش‌تر است. اگر محیط مستطیل ۳۶ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۵ ۳) ۷۲ ۴) ۸۴

گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم عرض مستطیل x باشد، با توجه به صورت سؤال، طول آن $2x+3$ خواهد بود. (در صورت سؤال گفته از دو برابر عرض یعنی $2x$ سه واحد بیش‌تر یعنی $2x+3$). چون محیط مستطیل برابر ۳۶ است، پس:

$$2(\overset{\text{عرض}}{x}+\overset{\text{طول}}{\overbrace{2x+3}})=36\Rightarrow 2(3x+3)=36\overset{\div 2}{\Rightarrow}3x+3=18\Rightarrow 3x=18-3\Rightarrow 3x=15\Rightarrow x=\frac{15}{3}=5$$

بنابراین طول مستطیل برابر $2x+3=2(5)+3=13$ و عرض آن برابر ۵ است، پس مساحت مستطیل برابر $5\times 13=65$ می‌باشد.

درس ۱ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

معادلهٔ درجهٔ اول

۱. کدام معادلهٔ زیر، یک معادلهٔ درجهٔ اول است؟

۱) $3x^2+2x=5$ ۲) $3x-1=2-\frac{x}{2}$ ۳) $|x|+2x=5$ ۴) $2x+\frac{2}{x}=4$

۲. کدام معادلهٔ زیر، یک معادلهٔ درجهٔ اول است؟

۱) $3x(x-1)=x^2+1$ ۲) $x(x-2)=2x$ ۳) $x+2x(1-x)=x^2$ ۴) $(x-1)(x^2+x+1)=x(x^2-2)$

۳. جواب معادلهٔ $8(x+1)=13x-7$ چند واحد با کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی اختلاف دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۴. جواب معادلهٔ $4x+5(8-3x)=13x-56$ چگونه است؟

۱) فرد ۲) مضرب ۳ ۳) مربع کامل ۴) مضرب ۵

۵. جواب معادلهٔ $2(1-x)-3(x+1)=14$ چند واحد با جواب معادلهٔ $-5x+1=6$ اختلاف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶. جواب معادلهٔ $5x-(-3x-(2x-(x-9)))=0$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

۷. در معادلهٔ $-(x-6)+2x=\frac{5}{6}x$، قرینهٔ جواب معادله بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۸. جواب معادلهٔ $\frac{1}{4}(x-\frac{4}{3}x)=\frac{1}{2}x-2$ کدام است؟

۱) $\frac{21}{5}$ ۲) $\frac{24}{7}$ ۳) $\frac{19}{3}$ ۴) $\frac{25}{7}$

۹. مجموع جواب معادلهٔ $\frac{1-x}{2}-\frac{2-x}{3}=\frac{1-x}{4}$ با معکوسش کدام است؟

۱) ۳/۶ ۲) ۴/۸ ۳) ۴/۲ ۴) ۵/۲

۱۰. جواب معادلهٔ $\frac{4}{3}(x-6)+\frac{1}{2}(x+4)=5$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۱. جواب معادلهٔ $\frac{11x}{3}+4=\frac{12x}{7}-37$ کدام است؟

۱) ۴۱− ۲) ۴۰− ۳) ۲۱− ۴) ۳۷−

۱۲. اگر $A=2-3x$ و $B=5x-2$ باشند، جواب معادلهٔ $2A+3B=7$ کدام است؟

۱) ۱− ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲−

۱۳. اگر $a=2x-1$ ، $b=a+3$ و $c=2-b$ باشند، به ازای کدام مقدار m معادلهٔ $2a-b+c=m$ بی‌شمار جواب دارد؟

۱) ۳− ۲) ۴− ۳) ۵− ۴) ۶−

۱۴. اگر جواب معادلهٔ $3(x-2)+4(x+a)=28$ برابر ۲ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵. معادلهٔ $3x+5=x(7-a)+2$ جواب ندارد. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶. معادلهٔ $3x+7(5-4x)+nx=m$ بی‌شمار جواب دارد. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۵

کاربرد معادلهٔ درجهٔ اول در حل مسائل توصیفی

۱۷. سن پدری ۴ برابر سن فرزندش است. اگر پنج سال بعد سن او سه برابر سن فرزندش شود، مجموع سن آن‌ها اکنون چقدر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۱۸. آرش سه برابر امیر پول دارد و پول محمد از پول امیر ۴۰ هزار تومان بیش‌تر است. اگر مجموع پول سه نفر ۸۴۰ هزار تومان باشد، پول محمد چند تومان است؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۲۰

۱۹. یک عدد ۴ برابر عدد دیگر است. اگر مجموع آن‌ها ۶۵ باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها کدام است؟

۱) ۶۸۹ ۲) ۵۷۴ ۳) ۵۸۲ ۴) ۶۷۶

۲۰. ۷ عدد طبیعی متوالی را درنظر بگیرید. اگر مجموع چهار عدد ابتدایی با مجموع سه عدد انتهایی برابر باشد، مجموع دو عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۹ ۳) ۳۱ ۴) ۳۳

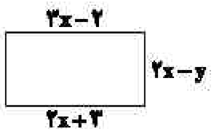
۲۱. یک شرکت دارای ۲ مدیر، ۳ مهندس و ۷ کارمند است. حقوق هر مهندس $\frac{2}{3}$ حقوق هر مدیر و ۳ برابر حقوق هر کارمند می‌باشد. اگر حقوق ماهانهٔ شرکت ۱۵۰ میلیون تومان باشد، حقوق یک مدیر چند میلیون تومان است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۵ ۳) ۲۷ ۴) ۳۲

۲۲. شخصی $\frac{1}{3}$ مسیری را با سرعت آرام و $\frac{1}{4}$ باقی‌ماندهٔ مسیر را با سرعت بیش‌تری طی می‌کند. پس از آن به مدت نیم ساعت ۵۴۰۰ متر را با سرعت زیاد ادامه داده تا به ۲۰۰ متری پایان مسیر می‌رسد. طول مسیر چند متر است؟

۱) ۱۰۸۰۰ ۲) ۱۱۲۰۰ ۳) ۱۱۶۰۰ ۴) ۱۲۴۰۰

۲۳. مساحت مستطیل شکل مقابل ۹۱ واحد مربع است. مقدار y کدام است؟

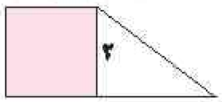


۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۲۴. طول یک مستطیل از سه برابر عرض آن دو واحد کم‌تر است. روی طول این مستطیل، مثلث متساوی‌الاضلاعی بنا می‌کنیم. اگر محیط پنج‌ضلعی حاصل ۱۶ باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۶

۲۵. در شکل زیر، مساحت مربع از $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث به اندازهٔ ۳ واحد مربع بیشتر است. مساحت ذوزنقه کدام است؟ (انسانی داخل ۱۴۰۱)



۱) ۵ ۲) ۵/۵
۳) ۶/۵ ۴) ۷

پایهٔ دهم

درس دوم: حل معادلهٔ درجهٔ ۲ و کاربردها

معادلهٔ درجهٔ دوم

هر معادله به شکل $ax^{۲}+bx+c=۰$ با شرط $a\neq ۰$ را معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم. (a نمی‌تونه صفر باشه چون اگر $a=۰$ باشه، معادله دیگه درجهٔ دوم نیست، امّا در معادلهٔ درجهٔ دوم b و c می‌تونن صفر باشن). به a، b و c ضرایب معادله می‌گوییم که اعداد حقیقی هستند. a ضریب $x^{۲}$، b ضریب x و c عدد ثابت معادله است. مثلاً هر یک از معادلات $۲x^{۲}+۳x+۵=۰$ ، $x^{۲}+۳x=۰$ و $۲x^{۲}-۸=۰$ معادلهٔ درجهٔ دوم هستند.

حل معادلهٔ درجهٔ دوم

برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم یعنی به‌دست آوردن xهایی که در تساوی صدق کنند، روش‌های مختلفی وجود دارد که در ادامه با آن‌ها آشنا می‌شوید. این‌که کدام روش را برای حل معادله انتخاب کنیم، بستگی به ضرایب معادله دارد که کم‌کم با حل مثال‌های متنوع انتخاب روش حل مسلط می‌شوید.

۱ ضرایب خاص: برای حل معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ در قدم اول به ضرایب معادله توجه می‌کنیم. به این صورت که:

الف) اگر $a+c+b=۰$ باشد، یکی از جواب‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است. مثلاً داریم:

$$۲x^{۲}+۵x-۷=۰ \xRightarrow[۲+(-۷)+۵=۰]{a+c+b=۰} x=۱ ، x=\frac{-۷}{۲}$$

ب) اگر $a+c=b$ باشد، یکی از جواب‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است. مثلاً داریم:

$$۵x^{۲}+۱۲x+۷=۰ \xRightarrow[۵+۷=۱۲]{a+c=b} x=-۱ ، x=-\frac{۷}{۵}$$

پس ممکنه ضرایب معادله، خاص باشن و خیلی سریع و بی‌دردسر بتونیم جواباشو پیدا کنیم. اول مجموع a و c ، یعنی ضریب $x^{۲}$ و عدد ثابت رو به‌دست میاریم. اگه با b ، یعنی ضریب x مساوی بشه یا جمعش با اون صفر بشه، معادله یک معادلهٔ خاصه و سریع می‌تونید جواباشو حدس بزنید. در حالت اول جواب‌ها ۱ و $\frac{c}{a}$ و در حالت دوم جواب‌ها -۱ و $-\frac{c}{a}$ میشه.

۹ ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $\sqrt{۳}x^{۲}+۲-(۲+\sqrt{۳})x=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

گزینهٔ ۳ اگر به معادله دقت کنید $a=\sqrt{۳}$ ، $b=-(۲+\sqrt{۳})$ و $c=۲$ است. واضح است که $a+c+b=۰$ می‌باشد، پس یک ریشهٔ آن $x=۱$ و ریشهٔ دیگر $x=\frac{c}{a}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ است. ($\sqrt{۳}$ تقریباً $۱/۷$ است، پس $\frac{۲}{۱/۷}\approx\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ حتماً از یک بزرگ‌تره) بنابراین ریشهٔ بزرگ‌تر معادله $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ است که گویا شدهٔ آن در گزینهٔ (۳) وجود دارد، ببینید:

$$\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

ب) ممکن است در معادلهٔ درجهٔ دوم b یا c یا هر دو صفر باشند که در این صورت به آن معادلهٔ درجهٔ دوم ناقص می‌گوییم. در این حالات نیز حل معادلهٔ درجهٔ دوم کار آسانی است.

۱) اگر $c=۰$ باشد آن‌گاه معادله به فرم $ax^{۲}+bx=۰$ خواهد بود. با فاکتورگیری می‌توان آن را به فرم $x(ax+b)=۰$ در آورد. می‌دانیم اگر ضرب دو عبارت صفر باشد، حداقل یکی از آن‌ها صفر است. پس:

$$x(ax+b)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ ax+b=۰\Rightarrow x=-\frac{b}{a}\end{cases}$$

مثلاً جواب‌های معادلهٔ $x^{۲}+۶x=۰$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x^{۲}+۶x=۰\Rightarrow x(x+۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x+۶=۰\Rightarrow x=-۶\end{cases}$$

۹ اگر صفر و ۴ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - ax + x + b = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینهٔ ۳ چون یک ریشهٔ معادله صفر است، پس حتماً عدد ثابت معادله، یعنی b برابر صفر می‌باشد. از طرفی داریم:

$$b=0 \Rightarrow x^2-ax+x=0 \Rightarrow x^2+(-a+1)x=0 \Rightarrow x(x+(-a+1))=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-a+1=0 \Rightarrow x=a-1 \end{cases}$$

بنابراین $a-1$ برابر ۴ می‌باشد. پس:

$$a-1=4 \Rightarrow a=5 \Rightarrow a+b=5+0=5$$

۲ اگر $b=0$ باشد، معادله به صورت $ax^2+c=0$ درمی‌آید. اگر a و c هم‌علامت نباشند (یکی مثبت باشه و یکی منفی) معادله دو ریشهٔ قرینهٔ $\sqrt{\frac{-c}{a}}$ و $-\sqrt{\frac{-c}{a}}$ دارد. (اگر a و c هم‌علامت باشن، معادله جواب نداره.) مثلاً معادله‌های زیر را ببینید:

$$2x^2-6=0 \Rightarrow 2x^2=6 \Rightarrow x^2=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow x=\sqrt{3}\ ,\ x=-\sqrt{3}$$

$2x^2+6=0 \Rightarrow 2x^2=-6 \Rightarrow x^2=-\frac{6}{2}=-3 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

توجه دقت کنید x^2 هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. پس معادلهٔ $x^2=-3$ جواب ندارد. در ضمن می‌دانیم اگر $\square^2=\bigcirc^2$ باشد، $\square=\pm\bigcirc$ خواهد بود، پس از تساوی $x^2=3$ نتیجه می‌شود $x=-\sqrt{3}$ و $x=\sqrt{3}$ است. به این روش، **روش ریشه‌گیری** می‌گوییم.

۳ اگر $b=c=0$ باشد، معادله دارای ریشهٔ مضاعف صفر است. (ریشهٔ مضاعف دیگه چیه؟)

$$ax^2=0 \Rightarrow x=0$$

ریشهٔ مضاعف: در یک معادلهٔ درجهٔ دوم، اگر دو ریشه با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم معادله ریشهٔ مضاعف دارد. مثلاً $x=3$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $(x-3)^2=0$ است. نگاه کنید:

$(x-3)^2=0 \Rightarrow (x-3)(x-3)=0 \Rightarrow x=3\ ,\ x=3 \Rightarrow$ $x=3$ ریشهٔ مضاعف است.

یادآوری حتماً به یاد دارید که وقتی ضرب دو یا چند عبارت صفر شود، حداقل یکی از آن‌ها صفر است.

$AB=0 \Rightarrow A=0$ یا $B=0$

با کمک این یادآوری روش دیگری برای حل معادله‌های درجهٔ دوم معرفی می‌کنیم:

۲ روش تجزیه: در دورهٔ اول دبیرستان با چند اتحاد جبری آشنا شدید. تعدادی از این اتحادها را می‌توان در حل معادلهٔ درجهٔ دوم به کار برد. قبل از هر چیز یک بار این اتحادها را ببینیم.

اتحاد مربع دو جمله‌ای	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(2x+3)^2=4x^2+12x+9$ $(x-5)^2=x^2-10x+25$
اتحاد مزدوج	$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	$9x^2-4=(3x-2)(3x+2)$
اتحاد جمله مشترک	$(x+a)(a+b)=x^2+(a+b)x+ab$	$(x+2)(x-5)=x^2-3x-10$

۱۰ به کمک اتحادها، جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $(2x+\frac{1}{2})^2=\square+\square+\frac{1}{4}$ ب) $(x-2y)^2(\square+\square)=x^2-4y^2$ پ) $x^2-\square+12=(x-6)(x-2)$

الف) به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(2x+\frac{1}{2})^2=\underbrace{\square}_{\text{اولی به توان ۲}}+\underbrace{\square}_{\text{دو برابر اولی در دومی}}+\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{دومی به توان ۲}} \Rightarrow 4x^2\ ,\ 2x$$

ب) اتحاد مزدوج به ما کمک می‌کند. کافی است پرانتز دوم مجموع x و 2y باشد. پس:

$$(x-2y)(\square+\square)=x^2-4y^2 \Rightarrow x\ ,\ 2y$$

پ) با توجه به اتحاد جمله مشترک داریم:

$$x^2-\underbrace{\square}_{\text{جمع غیرمشترک‌ها در مشترک}}+12=(x-6)(x-2) \Rightarrow 8x$$

حالا بریم سراغ روش تجزیه در حل معادلهٔ درجه دوم. آماده‌اید؟

بعد از این‌که ضرایب معادله برای حل آن کاری برای ما نکردند، سراغ تجزیه می‌رویم. در بسیاری از مواقع اتحاد جمله مشترک کارساز است. اگر ضریب x^2 برابر یک بود، معادلهٔ $x^2+bx+c=0$ را به‌صورت $(x+\ldots)(x+\ldots)=0$ نوشته و جاهای خالی را با دو عددی پر می‌کنیم که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر c و حاصل‌جمع آن‌ها برابر b شود. حال چون ضرب دو پرانتز صفر شده است، پس تک تک آن‌ها صفر می‌باشند.

$$x^2+bx+c=0\Rightarrow(x+\square)(x+\square)=0\Rightarrow\begin{cases}x+\square=0\Rightarrow x=-\square\\x+\square=0\Rightarrow x=-\square\end{cases}$$

دو عددی که ضربشان c و جمعشان b است.

به طور مثال، حل معادلات زیر را به روش تجزیه ببینید:

الف) $x^2+2x-15=0\Rightarrow(x+\ldots)(x+\ldots)=0\xrightarrow{\text{۵ و ۳- چطوره؟}}(x+5)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x+5=0\Rightarrow x=-5\\x-3=0\Rightarrow x=3\end{cases}$

جمعشان ۲ و ضربشان ۱۵- است.

ب) $x^2+10x+21=0\Rightarrow(x+\ldots)(x+\ldots)=0\xrightarrow{\text{۳ و ۷ چطوره؟}}(x+3)(x+7)=0\Rightarrow\begin{cases}x+3=0\Rightarrow x=-3\\x+7=0\Rightarrow x=-7\end{cases}$

جمعشان ۱۰ و ضربشان ۲۱ است.

پ) $x^2-6x+8=0\Rightarrow(x+\ldots)(x+\ldots)=0\xrightarrow{\text{۲- و ۴- چطوره؟}}(x-2)(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x-2=0\Rightarrow x=2\\x-4=0\Rightarrow x=4\end{cases}$

جمعشان ۶- و ضربشان ۸ است.

> **نکته** اگر ضریب x^2 در یک معادلهٔ درجهٔ دوم یک نباشد و ما اصرار به حل معادله به روش تجزیه داشته باشیم، می‌توانیم این‌گونه عمل کنیم که ضریب x^2 را برداریم و در عدد ثابت معادله ضرب کنیم و سپس ریشه‌های معادلهٔ جدید را به‌دست آوریم.
>
> *(وقتی ضریب x^2 را برمی‌داری، ضریب x^2 برابر یک میشه. حالا می‌تونی تجزیه کنی یا شاید معادله با ضرایب خاص بشه)*
>
> در انتها ریشه‌های به‌دست آمده را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم تا ریشه‌های معادلهٔ اصلی به‌دست آید.

به طور مثال، حل معادلهٔ $6x^2+x-15=0$ را ببینید:

$$6x^2+x-15=0\Rightarrow x^2+x-90=0\Rightarrow(x+\ldots)(x+\ldots)=0\xrightarrow{\text{با ۱۰ و ۹- موافقی؟}}(x+10)(x-9)=0\Rightarrow\begin{cases}x+10=0\Rightarrow x=-10\\x-9=0\Rightarrow x=9\end{cases}$$

جمعشان ۱ و ضربشان ۹۰- است.

حال کافی است برای به‌دست آوردن ریشه‌های معادلهٔ اصلی ۱۰- و ۹ را بر ضریب x^2 یعنی ۶ تقسیم کنیم، پس $x=\frac{-10}{6}=\frac{-5}{3}$ و $x=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ ریشه‌های معادلهٔ $6x^2+x-15=0$ هستند.

یک مثال دیگر ببینید. می‌خواهیم معادلهٔ $2x^2-7x+3=0$ را حل کنیم:

$$2x^2-7x+3=0\Rightarrow x^2-7x+6=0\xrightarrow[1+6-7=0]{\text{خاص شد}}x=1,\ x=\frac{6}{1}=6$$

حال باید ریشه‌های به‌دست آمده را بر ضریب x^2 یعنی ۲ تقسیم کنیم، پس ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-7x+3=0$ برابر $x=\frac{1}{2}$ و $x=\frac{6}{2}=3$ هستند.

> **نکته** گاهی اوقات فرم معادله به‌گونه‌ای است که می‌توانیم از اتحاد مزدوج برای حل معادله استفاده کنیم.

۹) ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $4x^2-(2-x)^2=0$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

گزینهٔ ۱ معادله به فرم $\square^2-\square^2=0$ است. اتحاد مزدوج خیلی به ما کمک می‌کند.

$$4x^2-(2-x)^2=0\Rightarrow(2x)^2-(2-x)^2=0\Rightarrow(2x-(2-x))(2x+(2-x))=0\Rightarrow(2x-2+x)(2x+2-x)=0$$

$$\Rightarrow(3x-2)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}3x-2=0\Rightarrow3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}\\x+2=0\Rightarrow x=-2\end{cases}$$

بنابراین ریشهٔ کوچک‌تر معادله $x=-2$ است.

! نکته اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم عبارت‌های یکسان در طرفین تساوی وجود داشت، می‌توانیم آن‌ها را با هم ساده کنیم امّا ریشهٔ عبارت ساده‌شده را باید جزو جواب‌های معادله درنظر بگیریم.

مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x-2)(x-4)=x-2$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

گزینهٔ ۳ در طرفین معادله $(x-2)$ وجود دارد. آن را از طرفین معادله حذف می‌کنیم، امّا باید ریشهٔ آن، یعنی $x-2=0 \Rightarrow x=2$ را جزو جواب‌های معادله درنظر بگیریم. حال جواب دیگر معادله را به‌دست‌آوریم:

$$\cancel{(x-2)}(x-4)=\cancel{x-2} \Rightarrow x-4=1 \Rightarrow x=1+4=5$$

بنابراین $x=2$ و $x=5$ ریشه‌های معادله‌اند، پس مجموع ریشه‌ها $2+5=7$ است.

۲ روش دلتا: اگر معادلهٔ درجهٔ دوم در حالات خاص نبود و تجزیه کردن آن هم مشکل یا امکان‌پذیر نبود، سراغ روش دلتا (Δ) می‌رویم. در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ داریم:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

توجه به Δ مبین معادلهٔ درجهٔ دوم نیز می‌گویند.

مثلاً حل معادلهٔ $4x^2+7x-2=0$ را با روش Δ ببینید، واضح است که در این معادله $a=4$ ، $b=7$ و $c=-2$ است، پس:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=49-4(4)(-2)=49+32=81$$

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-7-\sqrt{81}}{8}=\frac{-7-9}{8}=\frac{-16}{8}=-2$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-7+\sqrt{81}}{8}=\frac{-7+9}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

یک دقیقه با من باش، شما می‌تونید معادلهٔ $4x^2+7x-2=0$ رو به روش تجزیه هم حل کنید. نگاه کنید:

$$4x^2+7x-2=0 \Rightarrow x^2+7x-8=0 \Rightarrow (x+\ldots)(x+\ldots)=0 \xRightarrow{\text{۸ و ۱- عالیه}} (x+8)(x-1)=0$$

جمعشون ۷ و ضربشون ۸- باشه

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-8 \\ x=1 \end{cases} \xRightarrow{\text{تقسیم بر ۴ می‌کنیم}} \begin{cases} x=-2 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

توصیه جذر اعداد زیر را حفظ کنید، در روش دلتا به کارتان می‌آید.

a	۱۲۱	۱۴۴	۱۶۹	۱۹۶	۲۲۵	۲۵۶	۲۸۹	۳۲۴	۳۶۱	۴۰۰
$\sqrt{a}$	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰

! نکته گاهی اوقات ممکن است با جذر اعداد بزرگ‌تری هم مواجه شوید. باید با سعی و خطا کار را تمام کنید.

ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $2x^2+7x+3=0$ چند برابر ریشهٔ بزرگ‌تر آن است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{3}$

گزینهٔ ۲ ریشه‌های معادله را به روش دلتا به‌دست می‌آوریم. توجه کنید $a=2$ ، $b=7$ و $c=3$ است، پس:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=49-4(2)(3)=49-24=25$$

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-7-\sqrt{25}}{4}=\frac{-7-5}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-7+\sqrt{25}}{4}=\frac{-7+5}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین ریشهٔ بزرگ‌تر $-\frac{1}{2}$ و ریشهٔ کوچک‌تر -3 است، پس $\frac{-3}{-\frac{1}{2}}=6$ می‌باشد. (حواست هست تو اعداد منفی هر چه به سمت صفر میریم عدد بزرگ‌تر میشه؟ $-\frac{1}{2}$ به صفر نزدیک‌تره، پس بزرگ‌تر از -3 هستش. اول فکر کردی چون ریشهٔ کوچک‌تر چند برابر ریشهٔ بزرگ‌تره حتماً کوچک‌تر از یک میشه و گفتی میشه $\frac{1}{3}$ ؟؟؟)

۴ روش مربع کامل کردن: اتحاد مربع کامل دوجمله‌ای را یادتان هست؟ $((a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2)$. می‌توان معادلهٔ درجهٔ دوم را به کمک این اتحاد به شکل $(x+m)^2 = n$ تبدیل کرد. سپس با ریشه‌گیری، ریشه‌های معادله را به‌دست آورد.

برای حل معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ به روش مربع کامل گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

۱ اگر $a \neq 1$ باشد، طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر ۱ شود.

$$2x^2-8x-10=0 \xrightarrow{\div 2} x^2-4x-5=0$$

۲ عدد ثابت را به طرف دیگر تساوی می‌بریم:

$$x^2-4x=5$$

۳ نصف ضریب x را به توان ۲ می‌رسانیم و به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:

$$x^2-4x+\left(\frac{-4}{2}\right)^2=5+\left(\frac{-4}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2-4x+4=5+4$$

۴ حال سمت چپ تساوی مربع کامل است و می‌توانیم آن را به فرم $(x+m)^2$ بنویسیم.

$$(x-2)^2=9$$

۵ با ریشه‌گیری، ریشه‌های معادله به‌دست می‌آیند.

$$(x-2)^2=9 \Rightarrow x-2=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x-2=3 \Rightarrow x=3+2 \Rightarrow x=5 \\ x-2=-3 \Rightarrow x=-3+2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

نکته روش Δ نتیجهٔ روش مربع کامل کردن است. توصیه می‌کنم زمانی از روش مربع کامل کردن، معادلهٔ $x^2+bx+c=0$ را حل کنید که b عددی زوج باشد تا نصف ضریب x کسری نشود و در محاسبات دچار اشتباه نشوید.

؟ حل معادلهٔ $3x^2+2x-4=0$ به روش مربع کامل منجر به معادلهٔ $(x+m)^2=n$ شده است. مقدار n کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{13}{9}$

گزینهٔ ۴ ابتدا طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر ۱ شود. حال به طرفین معادله توان دوم نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم و داریم:

$$3x^2+2x-4=0 \Rightarrow x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0 \Rightarrow x^2+\frac{2}{3}x=\frac{4}{3} \Rightarrow \underbrace{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}_{\text{حتماً } (x+m)^2 \text{ است.}}=\frac{4}{3}+\frac{1}{9} \Rightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{12+1}{9}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{13}{9} \Rightarrow \begin{cases} n=\frac{13}{9} \\ m=\frac{1}{3} \end{cases}$$

معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ درجهٔ دوم

بعضی معادلات درجهٔ دوم نیستند امّا می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، آن را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرد. (مثلاً معادلهٔ $x^4-2x^2-3=0$ درجهٔ دوم نیست امّا اگه $x^2=t$ باشه، اونوقت معادله به‌صورت $t^2-2t-3=0$ درمیاد که یک معادلهٔ درجهٔ دومه) حال معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل که برحسب متغیر جدید مثلاً t هست را حل می‌کنیم تا t به‌دست آید. سپس عبارتی که مساوی با t قرار داده بودیم را با مساوی tهای به‌دست آمده قرار می‌دهیم تا x معلوم شود. مثلاً حل معادلهٔ $x^4-2x^2-3=0$ را ببینید:

$$x^2=t \Rightarrow t^2-2t-3=0 \xrightarrow[1+(-3)=-2]{\text{ضرب}} t=-1, t=3$$

حال x^2 را برابر tهای به‌دست آمده قرار می‌دهیم:

$t=-1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ جواب ندارد.

$$t=3 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

۹ مجموع ریشه‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر معادلهٔ $(x^۲-۳x)^۲-(x^۲-۳x)-۶=۰$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $x^۲-۳x=t$ باشد، معادله به صورت $t^۲-t-۶=۰$ می‌شود. حال ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل را به‌دست می‌آوریم:

$$t^۲-t-۶=۰\Rightarrow (t-۳)(t+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} t-۳=۰\Rightarrow t=۳ \\ t+۲=۰\Rightarrow t=-۲ \end{cases}$$

سپس $x^۲-۳x$ را برابر tهای به‌دست آمده قرار می‌دهیم:

$$t=۳\Rightarrow x^۲-۳x=۳\Rightarrow x^۲-۳x-۳=۰ \xrightarrow{\Delta=۹-۴(۱)(-۳)=۲۱} x=\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}, x=\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}$$

$$t=-۲\Rightarrow x^۲-۳x=-۲\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰ \xrightarrow[۱+۲+(-۳)=۰]{\text{قاعده شد}} x=۱, x=۲$$

واضح است که ریشهٔ بزرگ‌تر معادله $\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}$ و ریشهٔ کوچک‌تر آن $\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}$ است، پس مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}+\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}=\frac{۳+\sqrt{۲۱}+۳-\sqrt{۲۱}}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

نکته گاهی اوقات در یک معادلهٔ درجه دوم، یک عبارت بر حسب **x** تکرار می‌شود. در این جا هم می‌توانیم آن عبارت تکرارشونده را **t** فرض کنیم و ریشه های معادلهٔ جدید، یعنی **t** را به‌دست آوریم. در آخر عبارتی که مساوی با **t** قرار داده بودیم را مساوی **t**های به‌دست آمده می‌گذاریم تا **x** به‌دست آید.

۱۰ ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $(۳x+۱)^۲+۹(۳x+۱)+۱۴=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $-\frac{۵}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

گزینهٔ ۴ عبارت $۳x+۱$ در معادله تکرار می‌شود. با فرض $۳x+۱=t$ معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود و داریم:

$$t^۲+۹t+۱۴=۰\Rightarrow (t+۲)(t+۷)=۰\Rightarrow \begin{cases} t+۲=۰\Rightarrow t=-۲ \\ t+۷=۰\Rightarrow t=-۷ \end{cases}$$

حال $۳x+۱$ را برابر tهای به‌دست آمده قرار می‌دهیم تا x معلوم شود:

$$t=-۲\Rightarrow ۳x+۱=-۲\Rightarrow ۳x=-۲-۱\Rightarrow ۳x=-۳\Rightarrow x=-۱$$

$$t=-۷\Rightarrow ۳x+۱=-۷\Rightarrow ۳x=-۷-۱\Rightarrow ۳x=-۸\Rightarrow x=-\frac{۸}{۳}$$

بنابراین ریشهٔ کوچک‌تر معادله $x=-\frac{۸}{۳}$ است.

توجه کن این معادله درجهٔ دومه، اما چون $۳x+۱$ تو معادله تکرار میشه، $۳x+۱$ رو t گرفتیم و معادله رو حل کردیم. می‌تونستیم معادله رو به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ در بیاریم و حل کنیم که کمی وقت‌گیره.

$$(۳x+۱)^۲+۹(۳x+۱)+۱۴=۰\Rightarrow ۹x^۲+۶x+۱+۲۷x+۹+۱۴=۰$$

$$\Rightarrow ۹x^۲+۳۳x+۲۴=۰ \xrightarrow{a+c=b} x=-۱, x=\frac{-۲۴}{۹}=-\frac{۸}{۳}$$

تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

همان‌طور که دیدیم برای به‌دست آوردن ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ به روش دلتا، Δ زیر رادیکال قرار می‌گیرد. می‌دانیم اعداد منفی زیر رادیکال نمی‌روند (مثلاً تا حالا $\sqrt{-۲}$ دیدی؟). پس علامت Δ تعیین‌کنندهٔ تعداد ریشه‌های معادله می‌باشد، به جدول زیر توجه کنید:

علامت Δ	$\Delta>۰$	$\Delta=۰$	$\Delta<۰$
تعداد ریشه‌ها	معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.	معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد.	معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.
ریشه‌ها	$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}, x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$	$x_۱=x_۲=\frac{-b}{۲a}$	-

نکته اگر در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ ضرایب **a** و **c** مختلف‌العلامت باشند (یکی مثبت باشه یکی منفی) حتماً $\Delta>۰$ است و معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

کدام معادله زیر ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۱) $۲x^۲+x-۴=۰$ ۲) $x^۲-۴x+۴=۰$ ۳) $x^۲-۴x+۱=۰$ ۴) $(x-۲)(x+۱)+۵=۰$

گزینهٔ ۴ در گزینهٔ (۱) که a و c مختلف‌العلامت هستند (یکی $+۳$، دیگری -۴) حتماً $\Delta>۰$ است، پس دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. در گزینه‌های (۲) و (۳) مقدار Δ را به‌دست می‌آوریم:

$۲)\ \Delta=(-۴)^۲-۴(۱)(۴)=۱۶-۱۶=۰ \xRightarrow{\Delta=۰}$ ریشهٔ مضاعف دارد.

$۳)\ \Delta=(-۴)^۲-۴(۱)(۱)=۱۶-۴=۱۲ \xRightarrow{\Delta>۰}$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

بنابراین گزینهٔ (۴) یعنی معادلهٔ $(x-۲)(x+۱)+۵=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد. برای تمرین بیش‌تر دلتای آن را به‌دست آوریم. ابتدا باید معادله را به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ در آوریم:

$$\underbrace{(x-۲)(x+۱)}_{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}+۵=۰\Rightarrow x^۲-x-۲+۵=۰\Rightarrow x^۲-x+۳=۰\Rightarrow \Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(۳)=۱-۱۲=-۱۱$$

$\xRightarrow{\Delta<۰}$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

معادله $x^۲+(m+۱)x+۴=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد. بزرگ‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۴ ۴) -۵

گزینهٔ ۲ باید دلتای معادله صفر شود. واضح است که $a=۱$، $b=m+۱$ و $c=۴$ است، پس:

$$\Delta=۰\Rightarrow(m+۱)^۲-۴(۱)(۴)=۰\Rightarrow(m+۱)^۲-۱۶=۰\Rightarrow(m+۱)^۲=۱۶\xRightarrow{\text{ریشه‌گیری}}\begin{cases}m+۱=۴\Rightarrow m=۳\\ m+۱=-۴\Rightarrow m=-۵\end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار m برابر ۳ است.

نکته گاهی اوقات به‌جای آن‌که بگویند فلان معادله ریشهٔ مضاعف دارد، می‌گویند تفاضل دو ریشهٔ معادله صفر است.

در معادلهٔ درجهٔ دوم $۴x^۲-۲۰x+m=۰$ تفاضل دو ریشه برابر صفر است. یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

گزینهٔ ۳ چون تفاضل دو ریشهٔ معادله صفر است، یعنی معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس دلتای معادله برابر صفر است:

$$\Delta=۰\Rightarrow(-۲۰)^۲-۴(۴)(m)=۰\Rightarrow۴۰۰-۱۶m=۰\Rightarrow۱۶m=۴۰۰\Rightarrow m=\frac{۴۰۰}{۱۶}=\frac{۱۰۰}{۴}=۲۵$$

وقتی معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن‌گاه ریشهٔ معادلهٔ $x=\frac{-b}{۲a}$ است، پس:

$$m=۲۵\Rightarrow۴x^۲-۲۰x+۲۵=۰\Rightarrow x=\frac{-(-۲۰)}{۲\times۴}=\frac{\cancel{۲۰}^{۵}}{۲\times\cancel{۴}}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

نکته وقتی گفته می‌شود معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد، یعنی معادله می‌تواند دو ریشهٔ حقیقی متمایز یا مساوی داشته باشد، پس باید $\Delta\geq۰$ باشد.

به‌ازای چند مقدار طبیعی برای a معادلهٔ $x^۲+۴x+a-۱=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

گزینهٔ ۲ چون معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس باید $\Delta\geq۰$ باشد:

$$\Delta\geq۰\Rightarrow۴^۲-۴(۱)(a-۱)\geq۰\Rightarrow۱۶-۴(a-۱)\geq۰\Rightarrow۱۶-۴a+۴\geq۰\Rightarrow۲۰-۴a\geq۰\Rightarrow۴a\leq۲۰\Rightarrow a\leq\frac{۲۰}{۴}\Rightarrow a\leq۵$$

بنابراین a می‌تواند مقادیر طبیعی ۲، ۳، ۴، ۵ و ۱ را بپذیرد که ۵ مقدار است.

روابط بین ریشه‌های معادله با ضرایب معادله

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، می‌توان مجموع ریشه‌ها ($S=x_۱+x_۲$)، حاصل‌ضرب ریشه‌ها ($P=x_۱x_۲$) و قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها ($D=|x_۱-x_۲|$) را بدون نیاز به حل معادله و با استفاده از ضرایب معادله به‌دست آورد که در زیر می‌بینید:

$$|x_۱-x_۲|=D=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \qquad x_۱x_۲=P=\frac{c}{a} \qquad x_۱+x_۲=S=-\frac{b}{a}$$

(اگر $x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ باشن، می‌تونی تمامی روابط بالا رو خودت اثبات کنی.)

؟ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۳x-۲=۰$ باشند، حاصل $\frac{x_۱x_۲}{x_۱+x_۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

گزینهٔ ۱ ضرایب معادله $a=۱$، $b=۳$ و $c=-۲$ هستند. $x_۱x_۲$ و $x_۱+x_۲$ را می‌توانیم بر حسب ضرایب معادله به‌دست آوریم، پس:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲=-\frac{b}{a} \Rightarrow x_۱+x_۲=-\frac{۳}{۱}=-۳ \\ x_۱x_۲=\frac{c}{a} \Rightarrow x_۱x_۲=\frac{-۲}{۱}=-۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{x_۱x_۲}{x_۱+x_۲}=\frac{-۲}{-۳}=\frac{۲}{۳}$$

؟ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۳x-۲=۰$ باشند، حاصل $x_۱^۳x_۲+x_۲^۳x_۱$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۶- ۳) ۱۳ ۴) ۱۳-

گزینهٔ ۲ سعی می‌کنیم رابطهٔ $x_۱^۳x_۲+x_۲^۳x_۱$ را بر حسب $x_۱+x_۲$ و $x_۱x_۲$ بنویسیم:

$$x_۱^۳x_۲+x_۲^۳x_۱=x_۱x_۲(x_۱^۲+x_۲^۲)=P(S^۲-۲P)=(\frac{c}{a})((-\frac{b}{a})^۲-۲(\frac{c}{a}))=-۲((-۳)^۲-۲(-۲))=-۲(۹+۴)=-۲\times۱۳=-۲۶$$

؟ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۵x^۲-۸x-۴=۰$ باشند، مقدار $|x_۱^۲-x_۲^۲|$ کدام است؟

۱) $\frac{۸۴}{۲۵}$ ۲) $\frac{۹۰}{۲۵}$ ۳) $\frac{۹۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۰۲}{۲۵}$

گزینهٔ ۳ به کمک اتحاد مزدوج می‌توان $x_۱^۲-x_۲^۲$ را به‌صورت $(x_۱-x_۲)(x_۱+x_۲)$ نوشت، پس:

$$|(x_۱-x_۲)(x_۱+x_۲)|=|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\times(-\frac{b}{a})|=|\frac{\sqrt{۶۴-۴(۵)(-۴)}}{۵}\times(-\frac{-۸}{۵})|=|\frac{\sqrt{۶۴+۸۰}}{۵}\times\frac{۸}{۵}|$$

$$=|\frac{\sqrt{۱۴۴}}{۵}\times\frac{۸}{۵}|=|\frac{۱۲}{۵}\times\frac{۸}{۵}|=|\frac{۹۶}{۲۵}|=\frac{۹۶}{۲۵}$$ ($\sqrt{۱۴۴}$ رو حفظ کردی یا نه؟)

عبارت	نحوهٔ محاسبه بر حسب S، P و D
$x_۱^۲x_۲+x_۲^۲x_۱$	$x_۱^۲x_۲+x_۲^۲x_۱=x_۱x_۲(x_۱+x_۲)=P\times S$
$x_۱^۲+x_۲^۲$	$x_۱^۲+x_۲^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲=S^۲-۲P$
$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}$	$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=\frac{x_۲+x_۱}{x_۱x_۲}=\frac{S}{P}$
$\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}$	$\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{x_۱x_۲}=\frac{S^۲-۲P}{P}$ ($x_۱^۲+x_۲^۲$ بالا محاسبه شده بود)
$x_۱^۳+x_۲^۳$	$x_۱^۳+x_۲^۳=(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)=S^۳-۳PS$

نکته همان‌طور که ملاحظه کردید گاهی اوقات $x_۱+x_۲$، $x_۱x_۲$ و $x_۱-x_۲$ یعنی S، P و D در دل یک عبارت وجود دارند. در این موارد باید با استفاده از اتحادهای جبری، تجزیه کردن، فاکتورگیری و مخرج مشترک‌گیری و ... عبارت را بر حسب S، P و D نوشت. چند نمونه در جدول مقابل ببینید و نحوهٔ به‌دست آوردن آن‌ها را تمرین کنید.

توجه بعضی اوقات ممکن است عبارات را به‌صورت فارسی بیان کنند. چند نمونه ببینید:

مجموع مربعات ریشه‌ها	$x_1^2+x_2^2$	مجموع معکوس ریشه‌ها	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$
مجموع مکعبات ریشه‌ها	$x_1^3+x_2^3$	مجموع جذر ریشه‌ها	$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$
قدر مطلق تفاضل مربعات ریشه‌ها	$\lvert x_1^2-x_2^2\rvert$	مجموع معکوس مربع ریشه‌ها	$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$

دو حالت خاص:

۱ اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ دو ریشهٔ قرینه داشته باشد، حتماً مجموع ریشه‌ها صفر است، پس b حتماً صفر است.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$$

(این مطلب رو در حالت خاص معادلهٔ درجهٔ دوم دیده بودیم. این هم از یک زاویهٔ دیگر)

۲ اگر ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ معکوس هم باشند، حتماً حاصل‌ضرب آن‌ها یک است، پس حتماً $a=c$ می‌باشد.

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=1 \Rightarrow a=c$$

۹ ریشه‌های معادلهٔ $mx^2-4x+2m-1=0$ معکوس یکدیگرند. مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینهٔ ۲ چون ریشه‌ها معکوس یکدیگرند، پس $\frac{c}{a}=1$ و در نتیجه $a=c$ می‌باشد:

$$a=c \Rightarrow m=2m-1 \Rightarrow 1=2m-m \Rightarrow m=1$$

به‌ازای $m=1$ معادله به‌صورت $x^2-4x+1=0$ می‌شود. بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}=-(\frac{-4}{1})=4$ است.

نکته گاهی در بعضی تست‌ها یک رابطه برحسب دو ریشهٔ معادله داده می‌شود و باید پارامتر موجود در معادله را تعیین کنیم. در این‌گونه مسائل نوشتن حاصل‌ضرب یا حاصل‌جمع ریشه‌ها یا هردو و قرار دادن آن‌ها با رابطهٔ داده‌شده در یک دستگاه *(دستگاه چیه؟)* کلید حل مسأله است.

دستگاه معادلات خطی:

در واقع دو معادله و دو مجهول داریم، مثل $\begin{cases}2x+3y=5\\x-2y=-1\end{cases}$. یکی از راه‌های حل کردن آن، حذف کردن x یا y است تا به یک معادلهٔ یک مجهول برسیم. نام این روش حل، روش حذفی است. حل دستگاه $\begin{cases}2x+3y=5\\x-2y=-1\end{cases}$ را ببینید:

$$(-2)\times\begin{cases}2x+3y=5\\x-2y=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+3y=5\\-2x+4y=2\end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در یکی از معادلات}} 2x+3(1)=5 \Rightarrow 2x=5-3=2 \Rightarrow x=\frac{2}{2}=1$$

۱۰ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2x+2m+1=0$ باشند، به‌ازای کدام مقدار m رابطهٔ $\alpha+2\beta=-5$ برقرار است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -2

گزینهٔ ۴ با توجه به این‌که ضریب x^2 و ضریب x پارامتر ندارند، پس می‌توانیم مجموع ریشه‌ها یعنی $\alpha+\beta$ را به‌دست آوریم.

می‌دانیم $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{2}{1}=-2$ است، پس:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-2\\\alpha+2\beta=-5\end{cases} \xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{دو معادله را}} \beta=-3 \xrightarrow{\alpha+\beta=-2} \alpha=1$$

حال برای به‌دست آوردن m از حاصل‌ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{2m+1}{1} \Rightarrow 1\times(-3)=2m+1 \Rightarrow 2m+1=-3 \Rightarrow 2m=-3-1 \Rightarrow 2m=-4 \Rightarrow m=\frac{-4}{2}=-2$$

نکته گاهی اوقات قسمتی از عبارتی که برحسب ریشه‌ها می‌خواهند، شبیه خود معادله است. در این موارد این‌که «ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند» کلید حل سؤال است.

❓ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، مقدار $\alpha^2 + 3\beta - 5$ کدام است؟

۱) ۱۸　　۲) ۱۵　　۳) ۱۲　　۴) ۹

✅ **گزینهٔ ۴** یک بار عبارت خواسته‌شده را به‌صورت $\alpha^2 - 5 + 3\beta$ ببینید. موافقید که $\alpha^2 - 5$ شبیه قسمتی از معادلهٔ $x^2 - 3x - 5 = 0$ است. می‌دانیم $x = \alpha$ در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 5 = 3\alpha$$

بنابراین عبارت $\alpha^2 - 5 + 3\beta$ برابر $3\alpha + 3\beta$ است. حال داریم:

$$3\alpha + 3\beta = 3\underbrace{(\alpha + \beta)}_{-\frac{b}{a}} = 3(-\frac{-3}{1}) = 3 \times 3 = 9$$

کاربرد معادلهٔ درجهٔ دوم در حل مسائل اقتصادی

در هر بنگاه اقتصادی، سه مؤلفهٔ هزینه، درآمد حاصل از فروش و سود وجود دارد که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱ هزینه: هزینه تولید x واحد کالا که شامل هزینهٔ اولیه (راه‌اندازی، تجهیزات، تبلیغات و ...) و هزینهٔ تولید است که با $C(x)$ نمایش می‌دهند.

۲ درآمد: اگر N واحد کالا با قیمت هر واحد P به فروش برسد، $N \times P$ درآمد حاصل از فروش است که آن را با $R(x)$ نشان می‌دهند.

۳ سود: اگر هزینه‌ها را از درآمد حاصل از فروش x واحد کالا کم کنیم، آن‌چه باقی می‌ماند سود حاصل از فروش x واحد کالا است که آن را با $P(x)$ نشان می‌دهند.

بنابراین در یک بنگاه اقتصادی « هزینه − درآمد = سود » می‌باشد.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

❓ **تابع درآمد شرکتی به‌ازای تولید x واحد از یک کالا به‌صورت $R(x) = -x^2 + 12x$ و تابع هزینهٔ آن به‌صورت $C(x) = 98 - 9x$ است. درآمد شرکت پس از تولید حداقل چند کالا برابر ۱۲ واحد می‌شود؟**

۱) ۱۱　　۲) ۱۰　　۳) ۹　　۴) ۸

✅ **گزینهٔ ۲** ابتدا تابع سود را به‌دست می‌آوریم تا ببینیم با تولید چند واحد کالا تابع سود برابر ۱۲ می‌شود:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 12x - (98 - 9x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 12x - 98 + 9x \Rightarrow P(x) = -x^2 + 21x - 98$$

حال معادلهٔ $P(x) = 12$ را حل می‌کنیم:

$$P(x) = 12 \Rightarrow -x^2 + 21x - 98 = 12 \Rightarrow x^2 - 21x + 12 + 98 = 0 \Rightarrow x^2 - 21x + 110 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 11) = 0 \Rightarrow x = 10 , x = 11$$

بنابراین شرکت پس از تولید حداقل ۱۰ واحد کالا سود ۱۲ واحدی می‌کند. (معنی حداقل رو هم که می‌دونی.)

■ **نقطهٔ سر به سر:** تعداد تولید یک بنگاه اقتصادی که به‌ازای آن هزینه و درآمد برابر می‌شود (سود شرکت صفر میشه) و بنگاه نه سود می‌کند نه ضرر را نقطهٔ سر به سر می‌گوییم.

❓ **تابع درآمد شرکتی به‌ازای تولید x واحد کالا به‌صورت $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$ و تابع هزینهٔ آن $C(x) = 25 - \frac{13}{4}x$ است. این شرکت دومین باری که به نقطهٔ سربه‌سر خود می‌رسد، به ازای تولید چند واحد کالا است؟**

۱) ۵　　۲) ۱۵　　۳) ۲۰　　۴) ۲۵

✅ **گزینهٔ ۳** نقطهٔ سر به سر نقطه‌ای است که تابع سود شرکت برابر صفر شود. پس ابتدا تابع سود را به‌دست می‌آوریم:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - (25 - \frac{13}{4}x) \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 25 + \frac{13}{4}x \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}x - 25$$

حال معادلهٔ $P(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}x - 25 = 0 \Rightarrow x^2 - 25x + 100 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 20) = 0 \Rightarrow x = 5 , x = 20$$

بنابراین شرکت برای اولین بار به‌ازای تولید ۵ کالا و برای دومین بار به‌ازای تولید ۲۰ کالا به نقطهٔ سر به سر می‌رسد.

کاربرد معادلهٔ درجهٔ دوم در حل مسائل توصیفی

حل بعضی از مسائل توصیفی منجر به حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شود. در این‌گونه مسائل معمولاً دو جواب برای مجهول پیدا می‌شود که یکی از آن‌ها با توجه به شرایط سؤال قابل قبول نیست. مثلاً اگر سن فردی، عدد منفی شود، طول یک ضلع هندسی منفی شود و ... آن‌ها جواب‌های غیرقابل قبول مسأله هستند.

حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی از ۹ برابر عدد کوچک‌تر، ۸ واحد بیش‌تر است. عدد کوچک‌تر بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

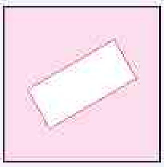
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم x و $x+2$ دو عدد زوج متوالی هستند. طبق صورت سؤال $x(x+2)$ برابر $9x+8$ است. پس:

$$x(x+2)=9x+8 \Rightarrow x^2+2x=9x+8 \Rightarrow x^2+2x-9x-8=0 \Rightarrow x^2-7x-8=0 \xrightarrow{a+c=b} x=-1 \ ,\ x=8$$

واضح است که -1 عددی زوج نیست، پس غیرقابل قبول است و $x=8$ جواب مسأله می‌باشد که با توجه به گزینه‌ها بر ۴ بخش‌پذیر است.

در شکل مقابل مستطیلی که طول آن ۱۰ واحد بیش‌تر از عرض آن است را از درون مربعی به ضلع ۴۰ برداشته‌ایم. اگر مساحت قسمت رنگی ۱۵۲۵ باشد، محیط مستطیل کدام است؟



۱) ۳۵ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

گزینهٔ ۲ اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، طول آن $x+10$ است. بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$1525=40^2-x(x+10) \Rightarrow 1525=1600-(x^2+10x) \Rightarrow x^2+10x=1600-1525$$

$$\Rightarrow x^2+10x=75 \Rightarrow x^2+10x-75=0 \Rightarrow (x-5)(x+15)=0 \Rightarrow x=5 \ ,\ x=-15$$

واضح است که -15 نمی‌تواند عرض مستطیل باشد. پس عرض مستطیل ۵ بوده و طول آن برابر ۱۵ می‌شود. بنابراین محیط مستطیل برابر است با:

$$P=2(5+15)=2\times 20=40$$

درس ۲ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

حل معادلهٔ درجهٔ دوم

۲۶. ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $3x^2+4x+1=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۲۷. ریشهٔ مثبت معادلهٔ $37x^2-16x-21=0$، چند واحد از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2-2x=x$ کم‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$ باشند، مقدار $x_1^3+x_2^3$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}-3$ ۲) $\sqrt{2}-3$ ۳) $2\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{2}-1$

۲۹. یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر -1 است. اگر $6a=b=5c$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۲/۸ ۳) ۱/۲- ۴) ۲/۸-

۳۰. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-x-3=0$ و $|x_1|=-x_1$ باشد، مقدار $4x_1+3x_2$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) صفر

۳۱. اگر $x=1$ یکی از جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $5x^2-3x+k=0$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) ۰/۴- ۲) ۰/۳- ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۳۲. اگر $x=-5$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(2m-4)x+m-9=0$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -1

۳۳. اگر $x=m$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ $3x^2-x+2mx-4=0$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۳۴. معادلهٔ $x^۲+(m+۶)x-m=۱۵$ دو ریشهٔ قرینه دارد. حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۹ ۳) -۱ ۴) -۱۶

۳۵. به‌ازای کدام مقدار a ریشه‌های معادلهٔ $(a+۳)x^۲-(a^۲-۹)x-۶=۰$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱) $\{۳\}$ ۲) $\{\ \}$ ۳) $\{-۳\}$ ۴) $\{۳,-۳\}$

۳۶. کدام معادله با بقیه، هیچ ریشهٔ مشترکی ندارد؟

۱) $x^۲-۸x+۱۲=۰$ ۲) $x^۲-۱۰x+۱۶=۰$ ۳) $x^۲+x-۱۲=۰$ ۴) $x^۲-۶x+۸=۰$

۳۷. اگر $x=-۳$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^۲-(m-۱)x+۴m-۲۷=۰$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۸. ریشه‌های معادلهٔ $(۲x-۸)(۶+۲x)=(۳x-۱۲)(-۳x-۹)$ کدام است؟

۱) ۴ ، ۳ ۲) -۴ ، ۳ ۳) -۴ ، -۳ ۴) -۳ ، ۴

۳۹. ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $۴x^۲-(۲-x)^۲=۰$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۰. مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲(x-۱)-۴(x-۱)=۰$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۱. مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x+۱)^۲(x-۳)-۴x(x-۳)=۰$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۲. ریشه‌های معادلهٔ $(x-۲)(۴x-۵)=۲-x$ چگونه‌اند؟

۱) یک ریشهٔ مثبت دارد. ۲) دو ریشهٔ مثبت دارد.

۳) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد. ۴) یک ریشهٔ منفی دارد.

۴۳. یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۴x+۱=۰$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $-۲-\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) $۲-۲\sqrt{۳}$

۴۴. مجموع ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x^۲-۸x+۱۳=۰$ و ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $۲x^۲-۶=۰$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۵. یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x+۳=۰$ به‌صورت $m+\sqrt{n}$ است. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱۹}{۲}$ ۳) $\frac{۲۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۹}{۴}$

۴۶. اگر $x_۱$ ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $x^۲-۴x-۱=۰$ باشد، مقدار $x_۱^۲$ کدام است؟

۱) $۸-۲\sqrt{۵}$ ۲) $۱۲-۴\sqrt{۵}$ ۳) $۸+۴\sqrt{۵}$ ۴) $۹-۴\sqrt{۵}$

۴۷. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۱۲x^۲-۵x-۲=۰$ و $x_۱>x_۲$ باشد، مقدار $۳x_۱+۴x_۲$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۴۸. ریشهٔ بزرگ معادلهٔ $x^۲-۵x+۳=۰$ به‌صورت $\frac{m+\sqrt{n}}{۲}$ است. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۴۹. مجموع ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x^۲-۲x-۲=۰$ و ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $x^۲-۸x+۱۳=۰$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۰. اگر $x=۳$ یک ریشهٔ معادلهٔ $ax^۲-(۲a+۳)x+a+۱=۰$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۱. اگر $x=n$ ریشهٔ منفی معادلهٔ $۵x^۲+nx-۳=۰$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۵}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$

۵۲. اگر معادلهٔ $4x^2 - 32x = 5$ را به روش مربع کامل حل کنیم، کدام معادله حاصل می‌شود؟

۱) $(x-8)^2 = \frac{49}{4}$ ۲) $(x-4)^2 = \frac{69}{4}$ ۳) $(x-8)^2 = \frac{69}{4}$ ۴) $(x-4)^2 = \frac{59}{4}$

۵۳. در حل معادلهٔ $2x^2 + 3x - 5 = 0$، معادلهٔ $(x+m)^2 = n$ حاصل شده است. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) $\frac{49}{16}$ ۲) $\frac{53}{16}$ ۳) $\frac{59}{16}$ ۴) $\frac{61}{16}$

۵۴. در حل معادلهٔ $2x^2 - 6x - 1 = 0$ به معادلهٔ $x^2 + mx = n$ رسیدیم. کدام عدد را به طرفین آن اضافه کنیم تا با روش ریشه‌گیری جواب‌های معادله به‌دست آید؟

۱) ۹ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۵۵. مجموع جواب‌های معادلهٔ $((2-x)^2 - 2)^2 = 9$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $4 + 2\sqrt{5}$ ۴) $4 + 2\sqrt{3}$

۵۶. ریشهٔ مثبت معادلات $(3x-2)^2 - 9 = 0$ و $(4x-1)^2 = a$ مشترک‌اند. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{225}{16}$ ۲) $\frac{289}{9}$ ۳) $\frac{196}{16}$ ۴) $\frac{256}{9}$

معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم

۵۷. تعداد جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵۸. ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) -2 ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) -3

۵۹. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^4 - 15x^2 + 54 = 0$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۵۴ ۴) $8\sqrt{2}$

۶۰. تعداد ریشه‌های معادلهٔ $2(x-3)^4 - x^2 + 6x - 10 = 0$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۶۱. در معادلهٔ درجه دوم $(x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1) = 6$ بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟

۱) $4 - \sqrt{3}$ ۲) $3 - \sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۶۲. مجموع ریشه‌های مثبت معادلهٔ $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۶۳. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-1)^2 - 2x^2 + 3 = 0$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $-2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

۶۴. مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x-2)^2 - 5(x-2) + 6 = 0$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۶۵. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۶۶. معادلهٔ $(x-3)^2 + 3 - k = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است. کم‌ترین مقدار صحیح k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۷. معادلهٔ $2x^2 + 6x + 1 - a = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است. کم‌ترین مقدار صحیح a کدام است؟

۱) -5 ۲) -4 ۳) -3 ۴) -2

۶۸. به‌ازای کدام مقدار a، معادلهٔ درجه دوم $3x^2 + ax - 3 = 0$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟ (انسانی خارج ۹۱)

۱) هر مقدار a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a = \pm 6$ ۴) فقط $a > 6$

.۶۹ به‌ازای چند عدد طبیعی a، معادلهٔ $x^۲ - ۴x + a = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

.۷۰ معادلهٔ $(x-۱)^۲ - k = ۶$ ریشهٔ مضاعف دارد. اگر معادلهٔ $x^۲ + kx + a + ۱ = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد، بیش‌ترین مقدار صحیح aکدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸- ۴) ۹-

.۷۱ معادلهٔ $mx^۲ - (m-۳)x + ۱ = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد. کم‌ترین مقدار mکدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۸ ۴) ۹

.۷۲ معادلهٔ $x^۲ + (۲-a)x - ۲a + ۱ = ۰$ دو ریشهٔ مساوی دارد. مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

.۷۳ به‌ازای کدام مقدار m در معادلهٔ $x^۲ - ۲mx + ۵m - ۶ = ۰$ اختلاف ریشه‌ها برابر صفر است؟

۱) ۲ ، ۳ ۲) ۳ ، ۴- ۳) ۲ ، ۳- ۴) ۴ ، ۳-

.۷۴ معادلهٔ درجهٔ دوم $x(۲x-۵) = a$ به‌ازای یک مقدار a ریشهٔ مضاعف دارد. مقدار ریشهٔ مضاعف کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

.۷۵ معادلهٔ $x^۲ + (a+۱)x + ۳۶ = ۰$ یک ریشهٔ مضاعف دارد. این ریشه کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴- ۲) ۸- ۳) ۴ ۴) ۶

.۷۶ معادلهٔ $ax^۲ + ۸x + ۱ = ۰$ ریشهٔ حقیقی <u>ندارد</u>. حدود a کدام است؟

۱) $a > ۸$ ۲) $a > ۱۶$ ۳) $a < ۸$ ۴) $a < ۱۶$

.۷۷ اگر $x = m$ ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ - ۳mx - ۸ + m = ۰$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر mکدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) نشدنی

.۷۸ معادلهٔ $(x^۲ - ۴)^۲(x^۲ - ۶x - ۷) = ۰$ چند ریشهٔ متمایز دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

.۷۹ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x^۲ + x + ۲)(x^۲ + x + ۳) = ۱۲$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۳

روابط بین ریشه‌های معادله با ضرایب معادله

.۸۰ معادلهٔ $۳x^۲ - ۶x + m = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز $x_۱$ و $x_۲$ است. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $x_۱x_۲ < ۱$ ۲) $x_۱x_۲ > ۱$ ۳) $x_۱x_۲ < ۳$ ۴) $x_۱x_۲ > ۳$

.۸۱ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۳x - ۵ = ۰$ باشند، مقدار $\frac{۵(x_۱ + x_۲)}{x_۱x_۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

.۸۲ چند مورد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) معادلهٔ درجهٔ دوم $\frac{۷}{۱۷}x^۲ + ax - \frac{۱۹}{۳} = ۰$ فقط درصورتی‌که $a > ۶$ باشد، دو جواب حقیقی متمایز دارد.

ب) معادلهٔ درجهٔ دوم $x(۲x-۵) = a$ به‌ازای $a = \frac{۵}{۴}$ ریشهٔ مضاعف دارد.

پ) در معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ + (m+۱)x - ۱۲ = ۰$، اگر مجموع دو ریشه $\frac{-۵}{۲}$ باشد، ریشهٔ مثبت $\frac{۳}{۲}$ است.

ت) اگر حاصل‌ضرب دو ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲ + ۷x - ۲m + ۲ = ۰$ برابر ۲- باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر $\frac{۲}{۳}$ است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

.۸۳ به‌ازای کدام مقدار k حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $(k+۳)x^۲ - ۷x + k = ۰$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است؟ (انسانی داخل ۹۹)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

.۸۴ اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $a(x+۱)^۲ - x + ۱ = ۸$ برابر $-\frac{۲}{۵}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $\frac{۳۵}{۳}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۳۵}{۷}$

۸۵. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+16=0$ باشند و $5x_1x_2=8(x_1+x_2)$، مقدار a کدام است؟

۱) -12 ۲) -10 ۳) -8 ۴) -6

۸۶. در معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2+(m+1)x-12=0$ مجموع دو ریشه $\frac{5}{2}$ می‌باشد. ریشهٔ مثبت کدام است؟ (انسانی داخل ۹۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۷. در معادلهٔ درجهٔ دوم $6x^2+(k+1)x+k=0$، اگر مجموع دو ریشهٔ حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۸۸. در معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+7x-2m+2=0$، حاصل ضرب دو ریشه -2 می‌باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر کدام است؟ (انسانی خارج ۹۷)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۸۹. در معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2+kx+1-k=0$، اگر حاصل ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۰. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(\alpha-3)x+4\beta=0$ باشند، مقدار $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -2

۹۱. ریشه‌های کدام معادله معکوس یکدیگرند؟

۱) $x^2-5x+2=0$ ۲) $2x^2-8x-2=0$ ۳) $x^2+3x-10=0$ ۴) $2x^2-5x+2=0$

۹۲. به‌ازای یک مقدار m، ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3mx+2m+6=0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟ (انسانی خارج ۹۵)

۱) $-1/5$ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۳. اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x+m=0$ برابر ۳ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۳ ۴) -3

۹۴. اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2+abx-3=0$ باشند، مبین معادله کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) -3 ۳) -21 ۴) ۳

۹۵. اگر m و n ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m-2)x+n-4=0$ باشند، مقدار mn کدام است؟

۱) -4 ۲) -6 ۳) ۴ ۴) ۶

۹۶. اگر m و n ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(m+2)x+2n=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۹۷. اگر -2 و ۶ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(a-b)x+3a+4b-7=0$ باشند، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -6

۹۸. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(x^2+x)^2-4(x^2+x)+3=0$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۹. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰۰. اگر $x=m$ ریشهٔ معادلهٔ $3x^2-4mx+2m-3=0$ باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) نشدنی

۱۰۱. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-21x-14=0$ باشند، مقدار $\frac{6}{x_2}+\frac{6}{x_1}$ کدام است؟

۱) -6 ۲) ۱۲ ۳) -9 ۴) ۱۸

۱۰۲. در معادلهٔ $x^2+4x-3=0$ مجموع معکوس ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۱۰۳. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-2=0$ باشند، مقدار $(3x_1-2)(3x_2-2)$ کدام است؟

۱) -20 ۲) 14 ۳) 16 ۴) 18

۱۰۴. در معادلهٔ $2x^2+6x-7=0$، مجموع مربعات ریشه‌های آن کدام است؟

۱) 12 ۲) 16 ۳) 20 ۴) 24

۱۰۵. مجموع مکعبات ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-6x-5=0$ کدام است؟

۱) 14 ۲) 15 ۳) 17 ۴) 18

۱۰۶. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x-6=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_1+1}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -5 ۳) -6 ۴) -8

۱۰۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+4=0$ باشند، مقدار $(x_1-\frac{2}{x_2})(x_2+\frac{2}{x_1})$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۱۰۸. در معادلهٔ $x^2-(m+2)x+6=0$ یک ریشه، ۶ برابر ریشهٔ دیگر است. مقدار مثبت m کدام است؟

۱) 5 ۲) 4 ۳) 3 ۴) 2

۱۰۹. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x-(m^2-1)=0$ باشند و $x_1^2x_2+x_2^2x_1=45$، مقدار مثبت m کدام است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 6

۱۱۰. در معادلهٔ $x^2+(m-4)x+27=0$ یک ریشه مربع ریشهٔ دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱) -6 ۲) -8 ۳) -10 ۴) -12

۱۱۱. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(a+2)x+4=0$ باشند و $x_1^2x_2=8$، مقدار a کدام است؟

۱) 4 ۲) -4 ۳) 6 ۴) -6

۱۱۲. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+m-3=0$ باشند، به‌ازای کدام مقدار m تساوی $\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3=7$ برقرار است؟

۱) ۴، ۲ ۲) ۳، ۱ ۳) ۵، ۲ ۴) ۵، ۱

۱۱۳. در معادلهٔ $x^2-3mx+81=0$، یک ریشه، سه برابر مربع ریشهٔ دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱) 8 ۲) 9 ۳) 10 ۴) 12

۱۱۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a-3)x-a=0$ باشند و $|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) 2 ۳) -2 ۴) 1

۱۱۵. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+ax-6=0$ باشند و $x_1+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) 3 ۲) 2 ۳) 5 ۴) 6

۱۱۶. در معادلهٔ $x^2-9x+3m+6=0$ تفاضل مربعات ریشه‌ها برابر ۲۷ است. مقدار m کدام است؟

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 6

۱۱۷. اگر $x=a$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^2-x-3=0$ باشد، مقدار $\frac{1}{a}-\frac{1}{a-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۱۸. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ باشند، حاصل $\alpha^3+5\beta^2-2\beta$ کدام است؟

۱) 100 ۲) 95 ۳) 90 ۴) 85

۱۱۹. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x-m+7=0$ باشند و $2x_1-x_2=15$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) 14 ۲) 12 ۳) 10 ۴) 8

۱۲۰. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+2a=0$ باشند و $2x_1+3x_2=19$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) 5 ۲) 4 ۳) 2 ۴) -3

۱۲۱. اگر رابطهٔ $3\alpha-\beta=5$ بین ریشه‌های معادلهٔ $ax^2-3ax+1=0$ برقرار باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

پاسخ‌های تشریحی

پایه ۱۰ فصل اول: معادلهٔ درجهٔ دوم

۱ | ۲

در معادلهٔ درجهٔ اول، توان متغیر x همواره برابر یک است. در گزینه‌ها فقط معادلهٔ گزینهٔ (۲) این چنین است. در گزینهٔ (۱) x^2 وجود دارد. در گزینهٔ (۳) x درون قدرمطلق است و در گزینهٔ (۴) هم x در مخرج کسر دیده می‌شود.

۲ | ۴

ابتدا تک تک معادله‌ها را مرتب می‌کنیم تا ببینیم توان x در کدام معادله برابر یک است.

$1)\ 3x(x-1)=x^2+1 \Rightarrow 3x^2-3x=x^2+1 \Rightarrow$ درجه اول نیست.

با هم ساده نمی‌شوند.

$2)\ x(x-2)=2x \Rightarrow x^2-2x=2x \Rightarrow$ درجه اول نیست.

$3)\ x+2x(1-x)=x^2 \Rightarrow x+2x-2x^2=x^2 \Rightarrow$ درجه‌اول نیست.

با هم ساده نمی‌شوند.

بنابراین گزینهٔ (۴) پاسخ درست است. به گزینهٔ (۴) دقت کنید:

$4)\ (x-1)(x^2+x+1)=x(x^2-2) \Rightarrow x^3-1=x^3-2x$

چی شد؟

$\Rightarrow -1=-2x \Rightarrow$ درجهٔ اول است.

به اتحاد چاق و لاغر توجه کنید:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

بنابراین $(x-1)(x^2+x+1)$ برابر x^3-1 است. (اگه فکر می‌کنی تشخیص اتحاد سخته یکی یکی ضرب کن)

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3+\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^2}-\cancel{x}-1=x^3-1$$

۳ | ۳

ابتدا جواب معادلهٔ $13x-7=8(x+1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$13x-7=8x+8 \Rightarrow 13x-8x=8+7 \Rightarrow 5x=15$$
$$\Rightarrow x=\frac{15}{5}=3$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی دورقمی، ۱۰ می‌باشد، پس جواب معادله $10-3=7$ واحد با آن اختلاف دارد.

۴ | ۳

جواب معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$4x+5(8-3x)=13x-56 \Rightarrow \underbrace{4x+40-15x}_{-11x}=13x-56$$
$$\Rightarrow -11x+40=13x-56 \Rightarrow 40+56=13x+11x$$
$$\Rightarrow 96=24x \Rightarrow x=\frac{96}{24}=4$$

چون $2^2=4$ می‌باشد، پس یک عدد مربع کامل است.

۵ | ۲

ابتدا جواب معادلهٔ $2(1-x)-3(x+1)=14$ را به‌دست می‌آوریم:

$$2-2x-3x-3=14 \Rightarrow -5x-1=14 \Rightarrow -5x=14+1 \Rightarrow -5x=15$$
$$\Rightarrow x=\frac{15}{-5}=-3$$

حال جواب معادلهٔ $-5x+1=6$ را به دست می‌آوریم:

$$-5x+1=6 \Rightarrow -5x=6-1 \Rightarrow -5x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{-5}=-1$$

بنابراین اختلاف جواب‌های دو معادله برابر $-1-(-3)=2$ می‌باشد.

۶ | ۳

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم، برای این کار از داخلی‌ترین پرانتز کار را شروع می‌کنیم:

$$5x-(-3x-(2x-(x-9)))=0 \Rightarrow 5x-(-3x-(2x-x+9))=0$$
$$\Rightarrow 5x-(-3x-(x+9))=0 \Rightarrow 5x-(-3x-x-9)=0$$
$$\Rightarrow 5x-(-4x-9)=0 \Rightarrow 5x+4x+9=0 \Rightarrow 9x+9=0$$
$$\Rightarrow 9x=-9 \Rightarrow x=\frac{-9}{9}=-1$$

۷ | ۳

ابتدا طرفین معادله را در ۶ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر حذف شود:

$$6\times(-(x-6)+2x)=6\times(\frac{5}{6}x) \Rightarrow -6(x-6)+12x=5x$$
$$\Rightarrow -6x+36+12x=5x \Rightarrow 6x+36=5x \Rightarrow 36=5x-6x$$
$$\Rightarrow 36=-x \Rightarrow x=-36$$

قرینهٔ ۳۶- برابر ۳۶ می‌باشد که با توجه به گزینه‌ها بر ۹ بخش‌پذیر است.

۸ | ۲

ابتدا طرفین معادله را در ۱۲ ضرب می‌کنیم: (۱۲ ک.م.م مخرج‌هاست و همون عدد خوبه هست که باعث میشه تمام مخرج‌ها از بین برن)

$$12\times(\frac{1}{4}(x-\frac{4}{3}x))=12\times(\frac{1}{2}x-2) \Rightarrow 3\times(x-\frac{4}{3}x)=6x-24$$
$$\Rightarrow 3x-4x=6x-24 \Rightarrow -x-6x=-24 \Rightarrow -7x=-24$$
$$\Rightarrow x=\frac{-24}{-7}=\frac{24}{7}$$

۹ | ۴

ابتدا طرفین معادله را در ۱۲ ضرب می‌کنیم (۱۲ ک.م.م مخرج‌هاست و همون عدد خوبه هست) تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$12\times(\frac{1-x}{2}-\frac{2-x}{3})=12\times(\frac{1-x}{4}) \Rightarrow 6(1-x)-4(2-x)=3(1-x)$$
$$\Rightarrow 6-6x-8+4x=3-3x \Rightarrow -2x-2=3-3x$$

-2 ، $-2x$

$$\Rightarrow -2x+3x=3+2 \Rightarrow x=5$$

حال مجموع ۵ و معکوسش یعنی $\frac{1}{5}$ برابر است با:

$$5+\frac{1}{5}=\frac{25+1}{5}=\frac{26}{5}=5/2$$

وقتی در گزینه‌ها اعداد به‌صورت اعشاری داده شده است، بعد از رسیدن به $\frac{26}{5}$ کافی است صورت و مخرج را در ۲ ضرب کنیم تا در مخرج عدد ۱۰ ظاهر شود و بتوانیم به راحتی آن را به‌صورت اعشاری بنویسیم:

$$\frac{26\times2}{5\times2}=\frac{52}{10}=5/2$$

۱۰ **۳**

ابتدا طرفین معادله را در ۶ ضرب می‌کنیم (همون عدد قوبه)

$$۶\times(\frac{۴}{۳}(x-۶)+\frac{۱}{۲}(x+۴))=۶\times ۵\Rightarrow ۸(x-۶)+۳(x+۴)=۳۰$$

$$\Rightarrow ۸x-۴۸+۳x+۱۲=۳۰\Rightarrow ۱۱x=۳۰+۴۸-۱۲\Rightarrow ۱۱x=۶۶$$

$$\Rightarrow x=\frac{۶۶}{۱۱}=۶$$

۱۱ **۳**

طرفین معادله را در ک. م. م مخرج‌ها یعنی ۲۱ ضرب می‌کنیم:

$$۲۱\times(\frac{۱۱x}{۳}+۴)=۲۱\times(\frac{۱۲x}{۷}-۳۷)\Rightarrow ۷۷x+\underbrace{۸۴}_{۲۱\times ۴}=۳۶x-۲۱\times ۳۷$$

$$\Rightarrow ۷۷x-۳۶x=-۲۱\times ۳۷-۲۱\times ۴\Rightarrow ۴۱x=-۲۱(\underbrace{۳۷+۴}_{۴۱})$$

$$\Rightarrow ۴۱x=-۲۱\times ۴۱\Rightarrow x=\frac{-۲۱\times\cancel{۴۱}}{\cancel{۴۱}}=-۲۱$$

۱۲ **۲**

ابتدا به‌جای A و B به‌ترتیب $۲-۳x$ و $۵x-۲$ را قرار می‌دهیم:

$$۲A+۳B=۷\xrightarrow[B=۵x-۲]{A=۲-۳x}۲(۲-۳x)+۳(۵x-۲)=۷$$

$$\Rightarrow ۴-۶x+۱۵x-۶=۷\Rightarrow ۹x-۲=۷\Rightarrow ۹x=۷+۲\Rightarrow ۹x=۹$$

$$\Rightarrow x=\frac{۹}{۹}=۱$$

۱۳ **۲**

ابتدا مقادیر b و c را بر حسب x به‌دست می‌آوریم:

$$b=a+۳\xrightarrow{a=۲x-۱}b=۲x-۱+۳\Rightarrow b=۲x+۲$$

$$c=۲-b\xrightarrow{b=۲x+۲}c=۲-(۲x+۲)=۲-۲x-۲=-۲x$$

حال مقادیر a، b و c را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲a-b+c=m\Rightarrow ۲(۲x-۱)-(۲x+۲)+(-۲x)=m$$

$$\Rightarrow ۴x-۲-۲x-۲-۲x=m\Rightarrow -۴=m$$

$-۲x$

صفر

برای آن‌که معادله بی‌شمار جواب داشته باشد، اولاً xها باید از بین بروند که در این معادله همین اتفاق افتاد، ثانیاً باید بعد از حذف xها به یک تساوی همواره درست برسیم، یعنی $-۴=m$ باید یک تساوی درست باشد، پس $m=-۴$ است.

۱۴ **۳**

می‌دانیم جواب معادله در معادله صدق می‌کند، پس اگر عدد ۲ را به‌جای xهای معادله قرار دهیم، باید به یک تساوی درست برسیم:

$$۳(\underbrace{۲-۲}_{۰})+۴(۲+a)=۲۸\Rightarrow ۳\times ۰+۸+۴a=۲۸$$

$$\Rightarrow ۰+۸+۴a=۲۸\Rightarrow ۴a=۲۸-۸\Rightarrow ۴a=۲۰\Rightarrow a=\frac{۲۰}{۴}=۵$$

۱۵ **۱**

برای آن‌که معادلهٔ درجهٔ اول جواب نداشته باشد باید xها از معادله حذف شوند و در نهایت به یک تساوی نادرست برسیم. پس در معادلهٔ $۳x+۵=x(۷-a)+۲$ برای آن‌که xها حذف شوند، باید در سمت راست تساوی هم $۳x$ داشته باشیم؛ پس:

$$\cancel{x}(۷-a)=۳\cancel{x}\Rightarrow ۷-a=۳\Rightarrow ۷-۳=a\Rightarrow a=۴$$

توجه کنید که با $a=۴$ به تساوی $۲=۵$ می‌رسیم که همواره نادرست است.

۱۶ **۳**

اولاً باید xها حذف شوند، ثانیاً به یک تساوی همیشه درست برسیم، پس:

$$۳x+۷(۵-۴x)+nx=m\Rightarrow ۳x+۳۵-۲۸x+nx=m$$

$$\Rightarrow -۲۵x+nx=m-۳۵\Rightarrow n=۲۵$$

باید حذف شوند

حال باید تساوی $۰=m-۳۵$ همیشه درست باشد، پس $m=۳۵$ می‌باشد. بنابراین مقدار $m+n$ برابر $۶۰=۳۵+۲۵$ است.

۱۷ **۳**

اگر سن فرزند را x فرض کنیم، سن پدر $۴x$ خواهد بود. پنج سال بعد، سن فرزند $x+۵$ و سن پدر $۴x+۵$ خواهد بود که سه برابر سن فرزند است:

$$۴x+۵=۳(x+۵)\Rightarrow ۴x+۵=۳x+۱۵\Rightarrow ۴x-۳x=۱۵-۵\Rightarrow x=۱۰$$

بنابراین سن فرزند ۱۰ و سن پدر $۴۰=۴\times ۱۰$ است و مجموع سن آن‌ها $۵۰=۴۰+۱۰$ می‌باشد.

۱۸ **۳**

فرض می‌کنیم امیر x هزار تومان پول دارد. پس آرش $۳x$ هزار تومان و محمد $x+۴۰$ هزار تومان پول دارند. حال مجموع پول‌ها ۸۴۰ هزار تومان است. پس:

$$x+(۳x)+(x+۴۰)=۸۴۰\Rightarrow ۵x+۴۰=۸۴۰$$

$$\Rightarrow ۵x=۸۴۰-۴۰\Rightarrow ۵x=۸۰۰\Rightarrow x=\frac{۸۰۰}{۵}=۱۶۰$$

بنابراین پول محمد برابر $x+۴۰=۱۶۰+۴۰=۲۰۰$ هزار تومان است.

۱۹ **۴**

اگر یکی از اعداد را x فرض کنیم، دیگری $۴x$ خواهد بود. چون مجموع آن‌ها ۶۵ است، پس:

$$x+۴x=۶۵\Rightarrow ۵x=۶۵\Rightarrow x=\frac{۶۵}{۵}=۱۳$$

بنابراین دو عدد ۱۳ و $۵۲=۴\times ۱۳$ هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $۶۷۶=۵۲\times ۱۳$ می‌شود.

به گزینه‌ها نگاه کن. رقم یکان آن‌ها با هم فرق دارد. پس برای ضرب ۵۲×۱۳ کافی است یکان اعداد را در هم ضرب کنیم $۶=۲\times ۳$، پس جواب عددی است که رقم یکان آن ۶ باشد یعنی گزینهٔ «۴».

۲۰ ۲

اولین عدد طبیعی را x فرض می‌کنیم، پس ۷ عدد طبیعی متوالی به صورت زیر هستند: $x, x+۱, x+۲, x+۳, x+۴, x+۵, x+۶$

حال گفته‌شده مجموع چهار عدد ابتدایی با مجموع سه عدد انتهایی برابر است، پس: $x+x+۱+x+۲+x+۳=x+۴+x+۵+x+۶$

$$\Rightarrow ۴x+۶=۳x+۱۵ \Rightarrow ۴x-۳x=۱۵-۶ \Rightarrow x=۹$$

بنابراین ۷ عدد طبیعی متوالی ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵ هستند که مجموع دو عدد بزرگ‌تر برابر ۲۹ = ۱۵ + ۱۴ است.

۲۱ ۳

فرض می‌کنیم حقوق هر کارمند x میلیون تومان باشد، پس حقوق هر مهندس ۳x میلیون تومان است. چون حقوق هر مهندس $\frac{۲}{۳}$ حقوق هرمدیر است، پس حقوق هر مدیر $\frac{۳}{۲}$ حقوق هر مهندس می‌باشد و برابر $\frac{۳}{۲}\times ۳x=\frac{۹}{۲}x$ می‌باشد. حال داریم:

$$۲\times\frac{۹}{۲}x+۳\times۳x+۷\times x=۱۵۰ \Rightarrow ۹x+۹x+۷x=۱۵۰$$

$$\Rightarrow ۲۵x=۱۵۰\Rightarrow x=\frac{۱۵۰}{۲۵}=۶$$

بنابراین حقوق هر مدیر برابر است با: $\frac{۹}{۲}x=\frac{۹}{۲}\times۶=۲۷$

۲۲ ۲

فرض می‌کنیم طول مسیر x باشد. پس $\frac{۱}{۳}x$ را با سرعت آرام طی می‌کند. $\frac{۱}{۴}$ باقی‌ماندهٔ مسیر، یعنی $\frac{۱}{۴}(x-\frac{۱}{۳}x)$ که آن را با سرعت بیش‌تر طی می‌کند و در ادامه یک مسیر ۵۴۰۰ متری را طی می‌کند تا ۲۰۰ متر با پایان مسیر فاصله داشته باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۴}(x-\frac{۱}{۳}x)+\overbrace{۵۴۰۰+۲۰۰}^{۵۶۰۰}=x$$

حال طرفین معادله را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$۱۲\times(\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۴}(x-\frac{۱}{۳}x)+۵۶۰۰)=۱۲x$$

$$۴x+۳(x-\frac{۱}{۳}x)+۱۲\times۵۶۰۰=۱۲x$$

$$\Rightarrow \underbrace{۴x+۳x-x}_{۶x}+۱۲\times۵۶۰۰=۱۲x\Rightarrow ۱۲\times۵۶۰۰=۱۲x-۶x$$

$$\Rightarrow ۱۲\times۵۶۰۰=۶x\Rightarrow x=\frac{\cancel{۱۲}^{۲}\times ۵۶۰۰}{\cancel{۶}}=۱۱۲۰۰$$

۲۳ ۲

در مستطیل، اضلاع روبه‌رو با هم برابرند، پس:

$$۳x-۲=۲x+۳\Rightarrow ۳x-۲x=۳+۲\Rightarrow x=۵$$

بنابراین طول مستطیل برابر $۳(۵)-۲=۱۳$ می‌باشد. حال از روی مساحت مستطیل، عرض آن را به‌دست می‌آویم تا y معلوم شود:

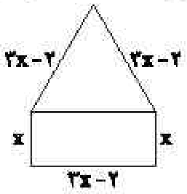
$$۱۳\times(۲x-y)=۹۱ \xrightarrow{x=۵} ۱۳\times(۲(۵)-y)=۹۱$$

$$\Rightarrow ۱۳\times(۱۰-y)=۹۱\Rightarrow ۱۳۰-۱۳y=۹۱\Rightarrow -۱۳y=۹۱-۱۳۰$$

$$\Rightarrow -۱۳y=-۳۹\Rightarrow y=\frac{-۳۹}{-۱۳}=۳$$

۲۴ ۲

فرض می‌کنیم عرض مستطیل x باشد، پس طول آن ۳x − ۲ است. وقتی مثلث متساوی‌الاضلاع را روی طول آن بنا می‌کنیم تا پنج‌ضلعی حاصل شود شکل حاصل به‌صورت مقابل است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع طول سه ضلع برابر است. پس:



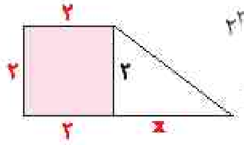
$$\text{محیط}=۳(۳x-۲)+۲x=۱۶\Rightarrow ۹x-۶+۲x=۱۶$$

$$\Rightarrow ۱۱x=۱۶+۶\Rightarrow ۱۱x=۲۲\Rightarrow x=\frac{۲۲}{۱۱}=۲$$

بنابراین عرض مستطیل برابر ۲ و طول آن برابر $۳(۲)-۲=۴$ می‌باشد و مساحت آن برابر $۴\times۲=۸$ می‌شود.

۲۵ ۴

با توجه به اندازه‌های روی شکل و فرض صورت سؤال داریم:



$$۲^۲=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}\times x\times ۲)+۳\Rightarrow ۴=\frac{۱}{۳}x+۳$$

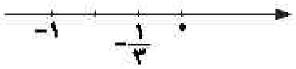
$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}x=۱\Rightarrow x=۳$$

بنابراین مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}(۲+۵)\times۲=\frac{۱}{۲}\times۷\times۲=۷$$

۲۶ ۳

به ضرایب معادله دقت کنید. a + c برابر b است (۴ = ۱ + ۳) بنابراین یک ریشهٔ معادله ۱- و دیگری $-\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۳}$ است. واضح است که $-\frac{۱}{۳}$ ریشهٔ بزرگ‌تر معادله است.



در اعداد منفی هر چه به صفر نزدیک‌تر می‌شویم عدد بزرگ‌تر می‌شود.

۲۷ ۲

در معادلهٔ $۳۷x^۲-۱۶x-۲۱=۰$ مجموع ضرایب صفر است. ($۳۷+(-۲۱)+(-۱۶)=۰$) پس یک ریشه ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}=\frac{-۲۱}{۳۷}$ است. بنابراین ریشهٔ مثبت معادله x = ۱ می‌باشد. حال ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x=x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲-۲x-x=۰\Rightarrow x^۲-۳x=۰\Rightarrow x(x-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۳=۰\Rightarrow x=۳\end{cases}$$

ریشهٔ مثبت x = ۳ است. پس ریشهٔ مثبت معادلهٔ اول ۳ − ۱ = ۲ واحد از ریشهٔ مثبت معادلهٔ دوم کم‌تر است.

۲۸ ۳

به ضرایب معادله دقت کنید. $a=۱$، $b=-\sqrt{۲}+۱$ و $c=-\sqrt{۲}$ است. همان‌طور که می‌بینید a + c برابر b است $(۱+(-\sqrt{۲})=-\sqrt{۲}+۱)$. پس یک ریشه ۱- و ریشهٔ دیگر $-\frac{c}{a}=-\frac{-\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۲}$ است، در نتیجه $x_۱^۳+x_۲^۳$ برابر است با:

$$x_۱^۳+x_۲^۳=(-۱)^۳+(\sqrt{۲})^۳=-۱+۲\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-۱$$

$$(\sqrt{۲})^۳=\underbrace{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}_{۲}\times\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

۲۹ ۳

چون یک ریشهٔ معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر ۱- است، پس ریشهٔ دیگر آن $-\frac{c}{a}$ می‌باشد، پس:

$$x_۲=-\frac{c}{a}=-\frac{\frac{b}{۵}}{\frac{b}{۶}}=-\frac{۶b}{۵b}=-\frac{۶}{۵}=-۱/۲$$

۳۰ ۴

در معادلهٔ $۴x^۲-x-۳=۰$ مجموع ضرایب برابر صفر است $(۴+(-۳)+(-۱)=۰)$، پس یک ریشهٔ آن ۱ و دیگری $\frac{c}{a}=\frac{-۳}{۴}$ است.

حالا باید ببینیم کدام‌یک $x_۱$ و کدام‌یک $x_۲$ است، چون $|x_۱|$ برابر $-x_۱$ شده است، پس حتماً $x_۱$ منفی است. در نتیجه $x_۱=-\frac{۳}{۴}$ و $x_۲=۱$ است. بنابراین داریم: $۴x_۱+۳x_۲=۴(-\frac{۳}{۴})+۳(۱)=-۳+۳=۰$

۳۱ ۱

چون $x=۱$ ریشهٔ معادله است، پس مجموع ضرایب صفر است و در ضمن ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}$ می‌باشد. پس:

$$۵+k+(-۳)=۰ \Rightarrow k+۲=۰ \Rightarrow k=-۲$$

بنابراین جواب دیگر معادله برابر است با:

$$x=\frac{c}{a}=\frac{k}{۵} \xrightarrow{k=-۲} x=\frac{-۲}{۵}=\frac{-۴}{۱۰}=-۰/۴$$

۳۲ ۳

ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند. پس $x=-۵$ را درمعادله جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار m معلوم شود:

$$x^۲+(۲m-۴)x+m-۹=۰$$

$$\xrightarrow{x=-۵}(-۵)^۲+(۲m-۴)(-۵)+m-۹=۰$$

$$\Rightarrow ۲۵-۱۰m+۲۰+m-۹=۰ \Rightarrow -۹m+۳۶=۰$$

$$\Rightarrow -۹m=-۳۶ \Rightarrow m=\frac{-۳۶}{-۹}=۴$$

بنابراین‌معادله‌به‌صورت $x^۲+۴x-۵=۰$ است‌وچون $a+c+b=۰$ است $(۱+(-۵)+۴=۰)$، ریشهٔ‌دیگرآن۱می‌باشد.توجه‌کنید ۵- همان $\frac{c}{a}$ است.

۳۳ ۴

ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس $x=m$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار m به‌دست آید:

$$۳x^۲-x+۲mx-۴=۰ \xrightarrow{x=m} ۳m^۲-m+۲m(m)-۴=۰$$

$$\Rightarrow ۳m^۲-m+۲m^۲-۴=۰ \Rightarrow ۵m^۲-m-۴=۰$$

$$\xrightarrow[۵+(-۴)+(-۱)=۰]{a+c+b=۰} m=۱\,,\,m=-\frac{۴}{۵}$$

چون $x=m$ ریشهٔ مثبت معادله است، پس $m=۱$ قابل قبول است.

حال باید $m=۱$ را در معادلهٔ اولیه جای‌گذاری کنیم تا ریشهٔ دیگر معلوم شود. امّا چون ۱ یک ریشهٔ معادله است پس ریشهٔ دیگر معادله حتماً $\frac{c}{a}$ است. در معادلهٔ $۳x^۲-x+۲mx-۴=۰$ مقادیر a و b معلوم هستند.

پس نیازی به جای‌گذاری $m=۱$ در معادله نداریم:

$$a=۳\,,\,c=-۴ \Rightarrow x=\frac{c}{a}=\frac{-۴}{۳}$$

۳۴ ۲

چون معادلهٔ $x^۲+(m+۶)x-m=۱۵$ دو ریشهٔ قرینه دارد، پس حتماً ضریب x یعنی b برابر صفر است:

$$m+۶=۰ \Rightarrow m=-۶$$

بنابراین معادله به‌صورت $x^۲-(-۶)=۱۵$ در می‌آید و داریم:

$$x^۲+۶=۱۵ \Rightarrow x^۲=۱۵-۶ \Rightarrow x^۲=۹ \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} x=\pm۳$$

پس حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله برابر $-۹=(-۳)\times۳$ است.

۳۵ ۱

برای آن‌که ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ قرینه یکدیگر باشند باید $b=۰$ باشد، پس در معادلهٔ $(a+۳)x^۲-(a^۲-۹)x-۶=۰$ باید $-(a^۲-۹)=۰$ باشد.

$$-(a^۲-۹)=۰ \Rightarrow a^۲-۹=۰ \Rightarrow a^۲=۹ \Rightarrow a=\pm۳$$

به‌ازای $a=-۳$، معادلهٔ درجهٔ دوم نیست، زیرا ضریب $x^۲$ برابرصفرمی‌شود.

امّا به‌ازای $a=۳$ معادله به‌صورت $۶x^۲-۶=۰$ درمی‌آید که داریم:

$$۶x^۲-۶=۰ \Rightarrow ۶x^۲=۶ \Rightarrow x^۲=\frac{۶}{۶}=۱ \Rightarrow x=\pm۱$$

پس $a=۳$ قابل قبول است.

۳۶ ۳

ریشهٔ تک‌تک معادلات را به دست می‌آوریم:

$$۱)\,x^۲-۸x+۱۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x-۶=۰ \Rightarrow x=۶ \end{cases}$$

$$۲)\,x^۲-۱۰x+۱۶=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x-۸=۰ \Rightarrow x=۸ \end{cases}$$

$$۳)\,x^۲+x-۱۲=۰ \Rightarrow (x+۴)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۴=۰ \Rightarrow x=-۴ \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

$$۴)\,x^۲-۶x+۸=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید معادلهٔ $x^۲+x-۱۲=۰$ ریشهٔ مشترکی با بقیهٔ معادلات ندارد.

۳۷ ۲

ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$(-۳)^۲-(m-۱)(-۳)+۴m-۲۷=۰ \Rightarrow ۹-(-۳m+۳)+۴m-۲۷=۰$$

$$\Rightarrow ۹+۳m-۳+۴m-۲۷=۰ \Rightarrow ۷m-۲۱=۰ \Rightarrow ۷m=۲۱ \Rightarrow m=\frac{۲۱}{۷}=۳$$

بنابراین‌معادله‌به‌صورت $x^۲-۲x-۱۵=۰$ است وریشهٔ‌دیگرآن‌برابراست‌با:

$$x^۲-۲x-۱۵=۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳ \\ x-۵=۰ \Rightarrow x=۵ \end{cases}$$

می‌خواهیم‌معادلهٔ $x^۲-۲x-۱۵=۰$ را به روش تجزیه حل کنیم. چون می‌دانیم یکی از ریشه‌هایش $x=-۳$ می‌باشد، پس یکی از پرانتزها $(x+۳)$ است، حالا از خودت بپرس ۳+ در چه عددی ضرب بشه تا ۱۵- تولید بشه. بله در ۵-. پس پرانتز بعدی $(x-۵)$ است.

۳۸ ۴

روش اول پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم تا معادلهٔ درجهٔ دوم را به فرم $ax^2+bx+c=0$ درآوریم:

(این روش به ذهن همه می‌رسه ولی طولانی و خسته‌کننده هستش)

$$(2x-8)(6+2x)=(3x-12)(-3x-9)$$
$$\Rightarrow 12x+4x^2-48-16x=-9x^2-27x+36x+108$$
$$\Rightarrow 4x^2-4x-48=-9x^2+9x+108$$
$$\Rightarrow 4x^2+9x^2-4x-9x-48-108=0$$
$$\Rightarrow 13x^2-13x-156=0\xrightarrow{\div 13}x^2-x-12=0\Rightarrow(x-4)(x+3)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x-4=0\Rightarrow x=4\\x+3=0\Rightarrow x=-3\end{cases}$$

روش دوم در پرانتز $(2x-8)$ از ۲، در پرانتز $(6+2x)$ نیز از ۲، در پرانتز $(3x-12)$ از ۳ و در نهایت در پرانتز $(-3x-9)$ از ۳- فاکتور می‌گیریم:

$$2(x-4)\times2(x+3)=3(x-4)\times(-3)\times(x+3)$$
$$\Rightarrow 4(x-4)(x+3)=(-9)(x-4)(x+3)$$

می‌دانیم ۴ با ۹- برابر نیست، پس باید ضریب آن‌ها، یعنی $(x-4)(x+3)$ برابر صفر باشد تا تساوی برقرار شود. بنابراین داریم:

$$(x-4)(x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x-4=0\Rightarrow x=4\\x+3=0\Rightarrow x=-3\end{cases}$$

۳۹ ۲

با توجه به فرم معادله بهتر است از اتحاد مزدوج استفاده کنیم:

$$4x^2-(2-x)^2=0\Rightarrow(2x)^2-(2-x)^2=0$$
$$\Rightarrow(2x-(2-x))(2x+(2-x))=0$$
$$\Rightarrow(2x-2+x)(2x+2-x)=0\Rightarrow(3x-2)(x+2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}3x-2=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}\\x+2=0\Rightarrow x=-2\end{cases}$$

۴۰ ۳

از $(x-1)$ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$x^2(x-1)-4(x-1)=0\Rightarrow(x-1)(x^2-4)=0$$

چون ضرب دو پرانتز صفر شده است، پس تک‌تک آن‌ها صفر هستند:

$$\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر $1+2+(-2)=1$ است.

۴۱ ۳

از $(x-3)$ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$(x+1)^2(x-3)-4x(x-3)=0\Rightarrow(x-3)((x+1)^2-4x)=0$$
$$\Rightarrow(x-3)(x^2+2x+1-4x)=0\Rightarrow(x-3)(x^2-2x+1)=0$$
$$\Rightarrow(x-3)(x-1)^2=0$$

چون ضرب دو پرانتز صفر شده است پس تک‌تک آن‌ها صفر هستند:

$$\begin{cases}x-3=0\Rightarrow x=3\\(x-1)^2=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1\end{cases}$$

دقت کنید $x=1$ ریشهٔ مضاعف معادله است. بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $3+1+1=5$ می‌باشد.

۴۲ ۲

معادله را به‌صورت $(x-2)(4x-5)=-(x-2)$ می‌نویسیم. $x-2$ را از طرفین معادله حذف می‌کنیم امّا ریشهٔ آن یعنی $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله است.

$$\cancel{(x-2)}(4x-5)=-\cancel{(x-2)}\xrightarrow{x-2=0\Rightarrow x=2}4x-5=-1\Rightarrow4x=-1+5$$
$$\Rightarrow4x=4\Rightarrow x=\frac{4}{4}=1$$

بنابراین $x=1$ و $x=2$ ریشه‌های معادله‌اند که دو ریشهٔ مثبت هستند.

۴۳ ۲

معادله را به روش دلتا حل می‌کنیم:

$$x^2+4x+1=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(1)(1)=16-4=12$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$$

بنابراین یک ریشه $-2+\sqrt{3}$ و ریشهٔ دیگر $-2-\sqrt{3}$ است که $-2-\sqrt{3}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}$$

۴۴ ۲

ابتدا ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x^2-8x+13=0$ را با روش دلتا به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=(-8)^2-4(1)(13)=64-52=12$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{12}}{2}\Rightarrow x=\frac{8\pm2\sqrt{3}}{2}=4\pm\sqrt{3}$$

بنابراین ریشهٔ بزرگ‌تر معادله $4+\sqrt{3}$ است. حال ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $2x^2-6=0$ را به روش ریشه‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$2x^2-6=0\Rightarrow2x^2=6\Rightarrow x^2=\frac{6}{2}=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

واضح است که $x=-\sqrt{3}$ ریشهٔ کوچک‌تر معادله است، بنابراین مجموع $4+\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ برابر $4+\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=4$ می‌باشد.

۴۵ ۱

ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+3=0$ را با روش دلتا به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=(-5)^2-4(1)(3)=25-12=13$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{2},x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$$

چون در صورت سؤال گفته‌شده یکی از ریشه‌ها به‌صورت $m+\sqrt{n}$ است، پس سعی می‌کنیم $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ را به این صورت در آوریم:

$$\frac{5+\sqrt{13}}{2}=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}$$

بنابراین $m=\frac{5}{2}$ و $n=\frac{13}{4}$ است و داریم:

$$m+n=\frac{5}{2}+\frac{13}{4}=\frac{10+13}{4}=\frac{23}{4}$$

۴۶ ۴

معادله $x^2-4x-1=0$ را با روش دلتا حل می‌کنیم تا ریشهٔ کوچک‌تر معادله یعنی x_1 را به‌دست آوریم:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-4)^2-4(1)(-1)=16+4=20$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}\Rightarrow x_1=2-\sqrt{5}$$

$$\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\times\sqrt{5}$$

حال x_1^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1^2=(2-\sqrt{5})^2=2^2-2(2)(\sqrt{5})+(\sqrt{5})^2=4-4\sqrt{5}+5=9-4\sqrt{5}$$

۴۷ ۲

ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $12x^2-5x-2=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-5)^2-4(12)(-2)=25+96=121$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{121}}{2\times12}\Rightarrow x=\frac{5\pm11}{24}$$

$$\Rightarrow x=\frac{16}{24}=\frac{2}{3},\ x=\frac{-6}{24}=-\frac{1}{4}$$

چون $x_1>x_2$ است، پس $x_1=\frac{2}{3}$ و $x_2=-\frac{1}{4}$ می‌باشد و داریم:

$$3x_1+4x_2=3(\frac{2}{3})+4(-\frac{1}{4})=2+(-1)=1$$

۴۸ ۴

با توجه به این‌که ریشه‌های معادله برابر $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ هستند و از آن جایی که در معادلهٔ $x^2-5x+3=0$ مقدار a برابر ۱ است، پس $m=-b$ و $n=\Delta$ می‌باشد. نگاه کنید:

$$\frac{m+\sqrt{n}}{2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}\Rightarrow\begin{cases}m=-b=-(-5)=5\\ n=\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(3)\\ =25-12=13\end{cases}$$

بنابراین $m+n$ برابر $5+13=18$ است.

۴۹ ۲

ابتدا ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x^2-2x-2=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(-2)=4+8=12$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

بنابراین ریشهٔ بزرگ معادله $1+\sqrt{3}$ است.

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}$$

حال ریشهٔ کوچک معادلهٔ $x^2-8x+13=0$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=(-8)^2-4(1)(13)=64-52=12$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{3}}{2}=4\pm\sqrt{3}$$

واضح است که $4-\sqrt{3}$ ریشهٔ کوچک‌تر معادله است. پس مجموع ریشه‌های خواسته‌شده برابر است با:

$$(1+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})=5$$

۵۰ ۲

ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$ax^2-(2a+3)x+a+1=0\Rightarrow a(3)^2-(2a+3)(3)+a+1=0$$

$$\Rightarrow 9a-(6a+9)+a+1=0\Rightarrow 9a-6a-9+a+1=0\Rightarrow 4a-8=0$$

$$\Rightarrow 4a=8\Rightarrow a=\frac{8}{4}=2$$

به‌ازای $a=2$ معادله به‌صورت $2x^2-7x+3=0$ می‌شود. به‌کمک روش دلتا داریم: $\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=(-7)^2-4(2)(3)=49-24=25$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2(2)}=\frac{7\pm5}{4}$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3,\ x_2=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

البته می‌شد معادلهٔ $2x^2-7x+3=0$ را به روش‌های دیگری هم حل کرد. مثلاً تجزیه کردن:

$$2x^2-7x+3=0\Rightarrow x^2-7x+6=0$$

$$\xRightarrow{a+c+b=0} x=1,\ x=6 \xRightarrow{\text{ریشه های واقعی}} x=\frac{1}{2},\ x=\frac{6}{2}=3$$

چون یک ریشهٔ این معادله را می‌دونیم، میشه اینجوری هم حلش کرد. $x=3$ یک ریشهٔ معادله است، پس حتماً در تجزیهٔ اون $(x-3)$ وجود داره. حالا از خودت می‌پرسی x در چی ضرب بشه و به ما $2x^2$ بده؟ آفرین $2x$ و یک بار هم از خودت می‌پرسی -3 در چی ضرب بشه به ما $+3$ بده. معلومه دیگه -1. پس:

$$2x^2-7x+3=0\Rightarrow(x-3)(2x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x-3=0\\ \Rightarrow x=3\\ 2x-1=0\\ \Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

۵۱ ۴

ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$5n^2+n(n)-3=0\Rightarrow 5n^2+n^2=3\Rightarrow 6n^2=3$$

$$\Rightarrow n^2=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}n=\sqrt{\frac{1}{2}}\\ n=-\sqrt{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

از آن‌جایی که n منفی است، پس $n=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ قابل قبول است.

حال به‌ازای $n=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ معادله به‌صورت $5x^2-\sqrt{\frac{1}{2}}x-3=0$ می‌شود و به کمک روش دلتا داریم:

$$\Delta=(-\sqrt{\frac{1}{2}})^2-4(5)(-3)=\frac{1}{2}+60=\frac{1+120}{2}=\frac{121}{2}$$

$$x=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{121}{2}}}{10}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{11}{\sqrt{2}}}{10}=\frac{\frac{12}{\sqrt{2}}}{10}=\frac{12}{10\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{20}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

توجه کنید نیازی نیست ریشهٔ دیگر را به‌دست آوریم. آن ریشه حتماً $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ یا $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ است. اینو میدونی که $11=\sqrt{121}$

۵۲ ۲

ابتدا طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$4x^2-32x=5 \Rightarrow x^2-8x=\frac{5}{4}$$

حال نصف ضریب x را به توان ۲ رسانده و به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:

$$x^2-8x+16=\frac{5}{4}+16 \Rightarrow (x-4)^2=\frac{5+64}{4} \Rightarrow (x-4)^2=\frac{69}{4}$$

بنابراین معادلهٔ $(x-4)^2=\frac{69}{4}$ حاصل می‌شود.

۵۳ ۴

در واقع برای حل معادلهٔ $2x^2+3x-5=0$ از روش مربع کامل کردن استفاده کرده‌ایم. پس:

$$2x^2+3x-5=0 \Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0 \Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{5}{2}+\frac{9}{16} \Rightarrow (x+\frac{3}{4})^2=\frac{49}{16}$$

بنابراین $m=\frac{3}{4}$ و $n=\frac{49}{16}$ بوده و داریم:

$$m+n=\frac{3}{4}+\frac{49}{16}=\frac{12+49}{16}=\frac{61}{16}$$

۵۴ ۲

چون معادلهٔ $2x^2-6x-1=0$ به معادلهٔ $x^2+mx=n$ تبدیل شده و ما می‌خواهیم معادلهٔ حاصل را با روش ریشه‌گیری حل کنیم، در واقع می‌خواهیم معادلهٔ $2x^2-6x-1=0$ را به روش مربع کامل کردن حل کنیم. پس ابتدا طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. ($x^2-3x-\frac{1}{2}=0$) سپس آن را به‌صورت $x^2-3x=\frac{1}{2}$ می‌نویسیم. حال باید نصف ضریب x را به توان ۲ رسانده و به طرفین معادله اضافه کنیم. پس عددی که اضافه می‌شود عدد $(-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$ است.

۵۵ ۲

کافی است از روش ریشه‌گیری معادلهٔ $((2-x)^2-2)^2=9$ را حل کنیم:

$$((2-x)^2-2)^2=9 \Rightarrow \begin{cases}(2-x)^2-2=3 \Rightarrow (2-x)^2=3+2\\ (2-x)^2-2=-3 \Rightarrow (2-x)^2=-3+2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(2-x)^2=5 \Rightarrow \begin{cases}2-x=\sqrt{5} \Rightarrow 2-\sqrt{5}=x\\ 2-x=-\sqrt{5} \Rightarrow 2+\sqrt{5}=x\end{cases}\\ (2-x)^2=-1 \Rightarrow \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$\text{مجموع}=(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})=4$$

۵۶ ۲

ابتدا ریشهٔ مثبت معادلهٔ $(3x-2)^2-9=0$ را به دست می‌آوریم. می‌توانیم از اتحاد مزدوج استفاده کنیم یا می‌توانیم ۹- را به طرف دیگر تساوی برده و از روش ریشه‌گیری استفاده کنیم که روش دوم به نظر راحت‌تر است. پس:

$$(3x-2)^2-9=0 \Rightarrow (3x-2)^2=9 \Rightarrow \begin{cases}3x-2=3 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}\\ 3x-2=-3 \Rightarrow \text{نیاز به محاسبه نیست.}\end{cases}$$

چون ریشهٔ مثبت را می‌خواهیم و $\frac{5}{3}$ مثبت است، پس نیازی به ریشهٔ دیگر نداریم. حال $x=\frac{5}{3}$ ریشهٔ معادلهٔ $(4x-1)^2=a$ نیز هست، پس در این معادله هم صدق می‌کند:

$$(4(\frac{5}{3})-1)^2=a \Rightarrow (\frac{20}{3}-1)^2=a \Rightarrow (\frac{20-3}{3})^2=a$$

$$\Rightarrow (\frac{17}{3})^2=a \Rightarrow a=\frac{289}{9}$$

17^2 رو حفظ کردی یا نه؟

۵۷ ۱

معادلهٔ $x^4+10x^2+9=0$ درجهٔ دوم نیست. اگر آن را به‌صورت $(x^2)^2+10x^2+9=0$ در نظر بگیریم، با فرض $x^2=t$ به معادلهٔ درجهٔ دوم $t^2+10t+9=0$ تبدیل می‌شود. حال ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم:

$$t^2+10t+9=0 \Rightarrow (t+1)(t+9)=0 \Rightarrow \begin{cases}t+1=0 \Rightarrow t=-1\\ t+9=0 \Rightarrow t=-9\end{cases}$$

چون هر دو مقدار t منفی شده است، پس هیچ جوابی برای x پیدا نمی‌شود، زیرا x^2 هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.

۵۸ ۲

اگر معادلهٔ $x^4-6x^2+8=0$ را به‌صورت $(x^2)^2-6x^2+8=0$ درنظر بگیریم با فرض $x^2=t$ به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود:

$$x^2=t \Rightarrow t^2-6t+8=0 \Rightarrow (t-4)(t-2)=0 \Rightarrow \begin{cases}t-4=0 \Rightarrow t=4\\ t-2=0 \Rightarrow t=2\end{cases}$$

حال داریم:

$$t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$t=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

واضح است که کوچک‌ترین ریشهٔ معادله $x=-2$ است.

۵۹ ۳

معادلهٔ $x^4-15x^2+54=0$ درجهٔ دوم نیست، امّا اگر آن را به‌صورت $(x^2)^2-15x^2+54=0$ درنظر بگیریم با فرض $x^2=t$ معادله به‌صورت $t^2-15t+54=0$ می‌شود و داریم:

$$t^2-15t+54=0 \Rightarrow (t-6)(t-9)=0 \Rightarrow \begin{cases}t-6=0 \Rightarrow t=6\\ t-9=0 \Rightarrow t=9\end{cases}$$

حال x^2 را برابر tهای به‌دست آمده قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}t=6 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6}\\ t=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3\end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$3\times(-3)\times\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=54$$

می‌تونستیم برای به‌دست آوردن حاصل‌ضرب ریشه‌های $x^4-15x^2+54=0$ همون tهای به‌دست آمده را در هم ضرب کنیم، یه کم فکر کن...

۶۰ ۳

ابتدا معادلهٔ $2(x-3)^4-x^2+6x-10=0$ را به‌صورت $2(x-3)^4-(x-3)^2-1=0$ می‌نویسیم. حال با فرض $(x-3)^2=t$ داریم:

$$2t^2-t^2-1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases}t=1\\ t=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

چون $t=(x-3)^2$ است، داریم:

$$t=1 \Rightarrow (x-3)^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x-3=1 \Rightarrow x=4 \\ x-3=-1 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$t=-\frac{1}{2} \Rightarrow (x-3)^2=-\frac{1}{2} \Rightarrow$ جواب ندارد.

بنابراین معادله دارای ۲ ریشه است.

چطوری معادلهٔ $2(x-3)^4-x^2+6x-10=0$ را به معادلهٔ $2(x-3)^4-(x-3)^2-1=0$ تبدیل کردیم؟

$$2(x-3)^4-(x^2-6x+10)=0 \Rightarrow 2(x-3)^4-(x^2-6x+9+1)=0$$

$$\Rightarrow 2(x-3)^4-((x-3)^2+1)=0 \Rightarrow 2(x-3)^4-(x-3)^2-1=0$$

۶۱ ۱

با فرض $t=x-1$ معادلهٔ $(x-1)^2+2\sqrt{3}(x-1)=6$ به صورت $t^2+2\sqrt{3}t=6$ می‌شود. حال در معادلهٔ $t^2+2\sqrt{3}t-6=0$ به کمک روش دلتا داریم:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(2\sqrt{3})^2-4(1)(-6)=12+24=36$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\sqrt{3}\pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{-2\sqrt{3}+6}{2}=-\sqrt{3}+3 \,,\, t_2=\frac{-2\sqrt{3}-6}{2}=-\sqrt{3}-3$$

حال باید $x-1$ را برابر tهای به‌دست آمده قرار دهیم تا x معلوم شود:

$$t=-\sqrt{3}+3 \Rightarrow x-1=-\sqrt{3}+3 \Rightarrow x=-\sqrt{3}+3+1 \Rightarrow x=4-\sqrt{3}$$

$$t=-\sqrt{3}-3 \Rightarrow x-1=-\sqrt{3}-3 \Rightarrow x=-\sqrt{3}-3+1 \Rightarrow x=-2-\sqrt{3}$$

واضح است که بزرگ‌ترین جواب معادله برابر $4-\sqrt{3}$ است.

۶۲ ۲

اگر معادلهٔ $x^4-29x^2+100=0$ را به‌صورت $(x^2)^2-29x^2+100=0$ درنظر بگیریم، با فرض $x^2=t$ به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود و داریم:

$$t^2-29t+100=0 \Rightarrow (t-4)(t-25)=0 \Rightarrow \begin{cases} t-4=0 \Rightarrow t=4 \\ t-25=0 \Rightarrow x=25 \end{cases}$$

حال ریشه‌های معادلهٔ $x^4-29x^2+100=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$t=25 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$$

بنابراین ریشه‌های مثبت معادله ۲ و ۵ هستند که مجموع آن‌ها برابر $2+5=7$ است.

۶۳ ۴

معادلهٔ $(x^2-1)^2-2x^2+3=0$ درجهٔ دوم نیست، امّا با فرض $x^2-1=t$ به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود. فقط باید حواسمان باشد که به‌جای x^2 مقدار $t+1$ را قرار دهیم:

$(x^2-1=t \Rightarrow x^2=t+1)$

$$t^2-2(t+1)+3=0 \Rightarrow t^2-2t-2+3=0 \Rightarrow t^2-2t+1=0$$

موافقید که t^2-2t+1 را می‌توان به صورت $(t-1)^2$ نوشت. پس:

$$(t-1)^2=0 \Rightarrow t-1=0 \Rightarrow t=1$$

بنابراین داریم:

$$x^2-1=t \xRightarrow{t=1} x^2-1=1 \Rightarrow x^2=1+1=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

پس حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله برابر $\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$ است.

۶۴ ۳

عبارت $x-2$ در معادلهٔ $(x-2)^2-5(x-2)+6=0$ تکرار شده است.

با فرض $x-2=t$ داریم:

$$t^2-5t+6=0 \Rightarrow (t-2)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t-2=0 \Rightarrow t=2 \\ t-3=0 \Rightarrow t=3 \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله و در نتیجه مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} t=2 \Rightarrow x-2=2 \Rightarrow x=2+2=4 \\ t=3 \Rightarrow x-2=3 \Rightarrow x=3+2=5 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=4+5=9$$

۶۵ ۱

اگر معادلهٔ $x^4-20x^2+64=0$ را به‌صورت $(x^2)^2-20x^2+64=0$ درنظر بگیریم، با فرض $x^2=t$ به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود. واضح است بعد از به‌دست آوردن tها باید آن‌ها را برابر x^2 قرار دهیم و هر یک از معادلات حاصل در صورت داشتن جواب، به ما دو مقدار قرینهٔ هم می‌دهند. پس مجموع آن‌ها حتماً صفر است. بنابراین معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ درصورتی‌که جواب داشته باشد، مجموع جواب‌ها حتماً صفر است. در معادلهٔ دلتای معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل، بزرگ‌تر از صفر است، پس حتماً t دو جواب دارد و می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموع ریشه‌های معادله حتماً صفر است.

۶۶ ۳

معادلهٔ $(x-3)^2+3-k=0$ را به‌صورت $(x-3)^2=k-3$ می‌نویسیم برای آن‌که معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد، باید $k-3>0$ باشد، پس:

$$k-3>0 \Rightarrow k>3 \Rightarrow \text{کم‌ترین مقدار صحیح } k=4$$

۶۷ ۳

باید دلتای معادلهٔ $2x^2+6x+1-a=0$ بزرگ‌تر از صفر باشد تا دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد، پس:

$$\Delta>0 \Rightarrow 6^2-4(2)(1-a)>0 \Rightarrow 36-8+8a>0$$

$$\Rightarrow 28+8a>0 \Rightarrow 8a>-28 \Rightarrow a>\frac{-28}{8} \Rightarrow a>\frac{-7}{2}$$

$$\Rightarrow a>-3/5$$

بنابراین کم‌ترین مقدار صحیح برای a عدد ۳- است.

$a>-3/5$ این‌جوریه:

کوچک‌ترین عدد صحیح کدومه؟ بله ۳- هستش.

۶۸ ۱

چون در معادلهٔ $3x^2+ax-3=0$، $a=3$ و $c=-3$ است و این دو مختلف‌العلامت هستند، پس حتماً $\Delta>0$ است و معادله دو جواب حقیقی و متمایز دارد. پس a هر مقداری می‌تواند باشد.

۶۹ **۳**

چون گفته‌شده معادلهٔ $x^2-4x+a=0$ دو ریشهٔ حقیقی دارد، باید $\Delta \ge 0$ باشد، پس:

$$\Delta \ge 0 \Rightarrow (-4)^2-4(1)(a) \ge 0 \Rightarrow 16-4a \ge 0 \Rightarrow 4a \le 16$$

$$\Rightarrow a \le \frac{16}{4} \Rightarrow a \le 4$$

بنابراین مقادیر طبیعی a می‌تواند ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، پس ۴ مقدار طبیعی می‌پذیرد.

۷۰ **۲**

معادلهٔ $(x-1)^2-k=6$ را به‌صورت $(x-1)^2=k+6$ می‌نویسیم. چون معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس باید $k+6=0$ باشد و در نتیجه $k=-6$ است. حال به‌ازای $k=-6$ معادلهٔ $x^2+kx+a+1=0$ به‌صورت $x^2-6x+a+1=0$ می‌شود. برای آن‌که این معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد، باید $\Delta>0$ باشد. پس:

$$\Delta>0 \Rightarrow (-6)^2-4(1)(a+1)>0 \Rightarrow 36-4a-4>0$$

$$\Rightarrow 32-4a>0 \Rightarrow 4a<32 \Rightarrow a<\frac{32}{4} \Rightarrow a<8$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار صحیح a برابر ۷ است.

۷۱ **۲**

چون معادلهٔ $mx^2-(m-3)x+1=0$ ریشهٔ مضاعف دارد، پس دلتای معادله حتماً صفر است.

$$\Delta=0 \Rightarrow \underbrace{(-(m-3))^2}_{(m-3)^2}-4(m)(1)=0 \Rightarrow m^2-6m+9-4m=0$$

$$\Rightarrow m^2-10m+9=0 \xrightarrow[1+9+(-10)=0]{a+c+b=0} m=1\,,\ m=\frac{c}{a}=\frac{9}{1}=9$$

بنابراین کم‌ترین مقدار m برابر ۱ است.

۷۲ **۴**

برای آن‌که معادلهٔ $x^2+(2-a)x-2a+1=0$ دو ریشهٔ مساوی داشته باشد، باید $\Delta=0$ باشد، پس:

$$\Delta=0 \Rightarrow (2-a)^2-4(1)(-2a+1)=0 \Rightarrow (2-a)^2+8a-4=0$$

$$\Rightarrow 4+a^2-4a+8a-4=0 \Rightarrow a^2+4a=0 \Rightarrow a(a+4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+4=0 \Rightarrow a=-4 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } a = 0+(-4)=-4$$

۷۳ **۱**

باید دلتای معادلهٔ $x^2-2mx+5m-6=0$ برابر صفر باشد تا دو ریشهٔ معادله برابر باشند و اختلاف آن‌ها برابر صفر شود. پس:

$$\Delta=0 \Rightarrow (-2m)^2-4(1)(5m-6)=0$$

$$\Rightarrow 4m^2-20m+24=0 \xrightarrow{\div 4} m^2-5m+6=0$$

$$(m-2)(m-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ m-3=0 \Rightarrow m=3 \end{cases}$$

۷۴ **۳**

معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x(2x-5)=a \Rightarrow 2x^2-5x=a \Rightarrow 2x^2-5x-a=0$$

می‌دانیم در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ریشهٔ مضاعف برابر $x=-\frac{b}{2a}$ است، پس در معادلهٔ $2x^2-5x-a=0$ ریشهٔ مضاعف برابر $x=-(\frac{-5}{2\times 2})=\frac{5}{4}$ می‌باشد. در این سؤال لازم نیست $\Delta=0$ را حل کنیم تا a معلوم شود. برای به‌دست آوردن ریشهٔ مضاعف به ضرایب x^2 و x نیاز داریم. بنابراین مستقیم ریشهٔ مضاعف را به‌دست می‌آوریم.

۷۵ **۴**

چون معادله ریشهٔ مضاعف دارد پس $\Delta=0$ است:

$$\Delta=0 \Rightarrow (a+1)^2-4(1)(36)=0 \Rightarrow (a+1)^2-144=0$$

$$\Rightarrow (a+1)^2=12^2 \Rightarrow a+1=\pm 12 \Rightarrow \begin{cases} a+1=12 \\ a+1=-12 \end{cases}$$

می‌دانیم ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ برابر $-\frac{b}{2a}$ است، پس در معادلهٔ $x^2+(a+1)x+36=0$ داریم:

$$x=-\frac{a+1}{2\times 1} \Rightarrow \begin{cases} a+1=12 \Rightarrow x=-\frac{12}{2}=-6 \\ a+1=-12 \Rightarrow x=-(\frac{-12}{2})=-(-6)=6 \end{cases}$$

در گزینه‌ها $x=6$ وجود دارد.

۷۶ **۲**

چون معادلهٔ $ax^2+8x+1=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد، باید $\Delta<0$ باشد، پس:

$$\Delta<0 \Rightarrow 8^2-4(a)(1)<0 \Rightarrow 64-4a<0 \Rightarrow 4a>64 \Rightarrow a>\frac{64}{4} \Rightarrow a>16$$

۷۷ **۴**

ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$x^2-3mx-8+m=0 \Rightarrow m^2-3m(m)-8+m=0$$

$$\Rightarrow m^2-3m^2-8+m=0 \Rightarrow -2m^2+m-8=0$$

توجه کنید در معادلهٔ $-2m^2+m-8=0$ دلتا منفی است و معادله ریشه ندارد. پس $x=m$ نمی‌تواند ریشهٔ معادلهٔ $x^2-3mx-8+m=0$ باشد. مقدار Δ را ببینید:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(1)^2-4(-2)(-8)=1-64=-63$$

۷۸ **۳**

چون ضرب دو پرانتز برابر صفر شده است، پس تک تک پرانتزها صفر هستند.

$$(x^2-4)^2(x^2-6x+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} (x^2-4)^2=0 \Rightarrow x^2-4=0 \\ \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2-6x+7=0 \end{cases}$$

در معادلهٔ $x^2-6x+7=0$ چون $\Delta>0$ است، پس حتماً دو ریشهٔ متمایز دارد که قطعاً ۲ و ۲- نیستند بنابراین معادلهٔ $(x^2-4)^2(x^2-6x+7)=0$ دارای ۴ ریشهٔ متمایز است.

چطور فهمیدیم $\Delta>0$ است؟ خیلی راحت، Δ را حساب کردیم:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-6)^2-4(1)(7)=36-28=8$$

از کجا فهمیدیم ۲ و ۲- ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+7=0$ نیستند؟

۲ و ۲- را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم، تساوی برقرار نمی‌شود:

$$(2)^2-6(2)+7=0 \Rightarrow 4-12+7=0 \Rightarrow -1=0 \ \times$$

$$(-2)^2-6(-2)+7=0 \Rightarrow 4+12+7=0 \Rightarrow 23=0 \ \times$$

۷۹ **۲**

با فرض $x^2+x+2=t$ داریم:

$$(x^2+x+2)(x^2+x+3)=12 \Rightarrow t(t+1)=12 \Rightarrow t^2+t-12=0$$

$$\Rightarrow (t+4)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=3 \end{cases}$$

حال x^2+x+2 را برابر tهای به دست آمده قرار می‌دهیم:

$t=-4 \Rightarrow x^2+x+2=-4 \Rightarrow x^2+x+6=0 \xRightarrow{\Delta<0}$ ریشه ندارد.

$$t=3 \Rightarrow x^2+x+2=3 \Rightarrow x^2+x-1=0 \xRightarrow{\Delta>0} S=-\frac{1}{1}=-1$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادله برابر ۱- است.

۸۰ **۱**

چون معادلهٔ $3x^2-6x+m=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است، پس $\Delta>0$ می‌باشد:

$$\Delta>0 \Rightarrow (-6)^2-4(3)(m)>0 \Rightarrow 36-12m>0$$

$$\Rightarrow 12m<36 \Rightarrow m<3$$

از طرفی حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، پس:

$$x_1x_2=\frac{m}{3} \xRightarrow{m<3} \frac{m}{3}<1 \Rightarrow x_1x_2<1$$

۸۱ **۲**

می‌دانیم $S=x_1+x_2$ برابر $-\frac{b}{a}$ و $P=x_1x_2$ برابر $\frac{c}{a}$ است. a، b و c را هم که می‌شناسیم (این دفعه رو میگم $a=2$، $b=3$ و $c=-5$)

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{3}{2} \\ x_1x_2=\frac{-5}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{5(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{5\times(-\frac{3}{2})}{-\frac{5}{2}}=\frac{-\frac{15}{2}}{-\frac{5}{2}}=3$$

۸۲ **۳**

تک‌تک گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) چون در معادلهٔ داده‌شده a و c مختلف‌العلامت هستند، پس همواره $\Delta>0$ بوده و به‌ازای هر مقدار a دو جواب حقیقی متمایز دارد. بنابراین گزارهٔ «الف» نادرست است.

ب) برای آن‌که معادلهٔ $x(2x-5)=a$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید $\Delta=0$ شود، پس:

$$2x^2-5x-a=0 \Rightarrow 25-4(2)(-a)=0 \Rightarrow 25+8a=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{-25}{8}$$

بنابراین گزارهٔ «ب» نیز نادرست است.

پ) مجموع دو ریشه $-\frac{5}{2}$ است. پس:

$$-\frac{5}{2}=\frac{-(m+1)}{2} \Rightarrow m+1=5 \Rightarrow m=4$$

حال به‌ازای $m=4$ چک می‌کنیم که ریشهٔ معادله می‌تواند $\frac{3}{2}$ باشد یا خیر:

$$2(\frac{9}{4})+5(\frac{3}{2})-12=0 \Rightarrow \frac{9}{2}+\frac{15}{2}-12=0 \Rightarrow 0=0$$

بنابراین $x=\frac{3}{2}$ در معادله صدق می‌کند، پس گزارهٔ «پ» درست است.

ت) حاصل‌ضرب دو ریشه ۲- است. پس:

$$\frac{-2m+2}{3}=-2 \Rightarrow -2m+2=-6 \Rightarrow -2m=-8 \Rightarrow m=4$$

حال به‌ازای $m=4$ چک می‌کنیم که $\frac{2}{3}$ می‌تواند ریشهٔ معادله باشد. البته با توجه به این‌که حاصل‌ضرب ریشه‌ها ۲- است، پس ریشهٔ دیگر باید ۳- باشد. $x=-3$ را در معادله قرار می‌دهیم که راحت‌تر است:

$$3(9)+7(-3)-6=0 \Rightarrow 0=0$$

بنابراین گزارهٔ «ت» نیز درست است و این یعنی دو گزاره از گزاره‌های داده‌شده درست می‌باشد.

۸۳ **۲**

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $(k+3)x^2-7x+k=0$ باشند، در صورت سؤال گفته‌شده $x_1x_2=-\frac{1}{2}$ است، پس:

$$x_1x_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k}{k+3}=-\frac{1}{2} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2k=-k-3$$

$$\Rightarrow 2k+k=-3 \Rightarrow 3k=-3 \Rightarrow k=\frac{-3}{3}=-1$$

۸۴ **۳**

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$a(x+1)^2-x+1=8 \Rightarrow a(x^2+2x+1)-x+1-8=0$$

$$\Rightarrow ax^2+2ax+a-x-7=0 \Rightarrow ax^2+(2a-1)x+a-7=0$$

می‌دانیم حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، پس:

$$\frac{a-7}{a}=-\frac{2}{5} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5a-35=-2a \Rightarrow 7a=35 \Rightarrow a=5$$

۸۵ **۲**

در معادلهٔ $x^2+ax+16=0$ داریم:

$$\begin{cases} x_1x_2=\frac{16}{1}=16 \\ x_1+x_2=-\frac{a}{1}=-a \end{cases}$$

مقادیر به‌دست آمده را در تساوی $5x_1x_2=8(x_1+x_2)$ جای‌گذاری می‌کنیم و داریم:

$$5\times16=8\times(-a) \Rightarrow 80=-8a \Rightarrow a=\frac{80}{-8}=-10$$

۸۶ **۳**

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+(m+1)x-12=0$ باشند، طبق گفتهٔ سؤال $x_1+x_2=\frac{5}{2}$ است، پس:

$$x_1+x_2=\frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{m+1}{\cancel{2}}=\frac{5}{\cancel{2}} \Rightarrow -m-1=5 \Rightarrow -m=5+1$$

$$\Rightarrow -m=6 \Rightarrow m=-6 \Rightarrow m+1=-6+1=-5$$

بنابراین معادله به‌صورت $2x^2-5x-12=0$ می‌باشد. به کمک روش دلتا داریم:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-5)^2-4(2)(-12)=25+96=121$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{121}}{2\times2} \Rightarrow x=\frac{5\pm11}{4}$$

$$\xRightarrow{\text{ریشهٔ مثبت}} x_1=\frac{5+11}{4}=\frac{16}{4}=4$$

چون سؤال ریشهٔ مثبت را خواسته، لازم نیست ریشهٔ دیگر را محاسبه کنیم، امّا ریشهٔ دیگر هم $x_2=\frac{5-11}{4}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$ است.

۸۷ ۲

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۶x^۲+(k+۱)x+k=۰$ باشند، طبق گفتهٔ سؤال $x_۱+x_۲=\frac{۱}{۶}$ است. پس:

$$\frac{۱}{\cancel{۶}}=-\frac{k+۱}{\cancel{۶}}\Rightarrow ۱=-k-۱\Rightarrow ۱+۱=-k\Rightarrow ۲=-k\Rightarrow k=-۲$$

حال به‌ازای $k=-۲$ معادله به‌صورت $۶x^۲-x-۲=۰$ درمی‌آید. به کمک روش دلتا داریم:

$$\Delta=b^۲-۴ac\Rightarrow \Delta=(-۱)^۲-۴(۶)(-۲)=۱+۴۸=۴۹$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۴۹}}{۲\times ۶}\Rightarrow x=\frac{۱\pm ۷}{۱۲}$$

$$\Rightarrow x_۱=\frac{۱+۷}{۱۲}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳},\ x_۲=\frac{۱-۷}{۱۲}=\frac{-۶}{۱۲}=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین ریشهٔ مثبت معادله $\frac{۲}{۳}$ است.

۸۸ ۱

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x-۲m+۲=۰$ باشند، طبق گفتهٔ سؤال $x_۱x_۲=-۲$ است، پس:

$$x_۱x_۲=-۲\Rightarrow\frac{-۲m+۲}{۳}=-۲\Rightarrow -۲m+۲=-۶\Rightarrow -۲m=-۶-۲$$

$$\Rightarrow -۲m=-۸\Rightarrow m=\frac{-۸}{-۲}=۴\Rightarrow -۲m+۲=-۲(۴)+۲=-۸+۲=-۶$$

بنابراین معادله به‌صورت $۳x^۲+۷x-۶=۰$ است. حال به کمک روش دلتا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=b^۲-۴ac\Rightarrow\Delta=۷^۲-۴(۳)(-۶)=۴۹+۷۲=۱۲۱$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\Rightarrow x=\frac{-۷\pm\sqrt{۱۲۱}}{۲\times ۳}\Rightarrow x=\frac{-۷\pm ۱۱}{۶}$$

$$\Rightarrow x_۱=\frac{-۷+۱۱}{۶}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳},\ x_۲=\frac{-۷-۱۱}{۶}=\frac{-۱۸}{۶}=-۳$$

بنابراین ریشهٔ بزرگ‌تر معادله برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۸۹ ۱

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+kx+۱-k=۰$ باشند، طبق گفتهٔ سؤال $x_۱x_۲=۵$ است، پس:

$$۵=\frac{۱-k}{۲}\Rightarrow ۱-k=۱۰\Rightarrow ۱-۱۰=k\Rightarrow k=-۹$$

حال به‌ازای $k=-۹$ معادله به‌صورت $۲x^۲-۹x+۱۰=۰$ می‌شود. به کمک روش Δ ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta=(-۹)^۲-۴(۲)(۱۰)=۸۱-۸۰=۱$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\Rightarrow x=\frac{۹\pm\sqrt{۱}}{۲\times ۲}\Rightarrow x=\frac{۹\pm ۱}{۴}$$

$$\Rightarrow x_۱=\frac{۹+۱}{۴}=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵,\ x_۲=\frac{۹-۱}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

بنابراین ریشهٔ بزرگ‌تر معادله ۲/۵ است.

۹۰ ۲

می‌دانیم حاصل‌ضرب ریشه‌ها در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر $\frac{c}{a}$ است، پس:

$$\alpha\beta=\frac{۴\beta}{۱}\Rightarrow\alpha\cancel{\beta}=۴\cancel{\beta}\Rightarrow\alpha=۴$$

از طرفی مجموع ریشه‌ها، یعنی $\alpha+\beta$ برابر $-\frac{b}{a}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\alpha+\beta=-(\frac{-(\alpha-۳)}{۱})=\alpha-۳\xRightarrow{\alpha=۴}\alpha+\beta=۴-۳=۱$$

۹۱ ۴

وقتی دو ریشهٔ معادله معکوس یکدیگر باشند، (یکی α باشه اون یکی $\frac{۱}{\alpha}$) آن‌گاه حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر ۱ می‌شود و این یعنی $\frac{c}{a}=۱$ بوده و $a=c$ است. در گزینه‌ها فقط در معادلهٔ $۲x^۲-۵x+۲=۰$، $a=c$ است.

۹۲ ۴

چون ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳mx+۲m+۶=۰$ معکوس یکدیگرند، پس $a=c$ است. و داریم:

$$۲m+۶=۲\Rightarrow ۲m=۲-۶\Rightarrow ۲m=-۴\Rightarrow m=\frac{-۴}{۲}=-۲$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه برابر $-\frac{b}{a}$ است، پس:

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-\frac{۳m}{۲}\xRightarrow{m=-۲}x_۱+x_۲=-(\frac{-۶}{۲})=-(-۳)=۳$$

۹۳ ۲

می‌دانیم اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله باشند، $|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ است، پس:

$$|x_۱-x_۲|=۳\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=۳\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{۱}=۳\Rightarrow\sqrt{\Delta}=۳\Rightarrow\Delta=۹$$

از طرفی $\Delta=b^۲-۴ac$ است، پس:

$$۹=(-۱)^۲-۴(۱)(m)\Rightarrow ۹=۱-۴m\Rightarrow ۹-۱=-۴m$$

$$\Rightarrow -۴m=۸\Rightarrow m=\frac{۸}{-۴}=-۲$$

حال حاصل‌ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ را به‌دست می‌آوریم که برابر $\frac{m}{۱}=\frac{-۲}{۱}=-۲$ می‌باشد.

۹۴ ۱

چون a و b ریشه‌های معادله‌اند، پس ضرب آن‌ها برابر $\frac{c}{a}$ یعنی $\frac{-۳}{۱}=-۳$ است. حال در معادله به‌جای ab عدد ۳- را قرار می‌دهیم. معادله به‌صورت $x^۲-۳x-۳=۰$ می‌شود. مبین معادله همان Δ است، پس:

$$\Delta=b^۲-۴ac\Rightarrow\Delta=(-۳)^۲-۴(۱)(-۳)=۹+۱۲=۲۱$$

۹۵ ۲

می‌دانیم مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است، پس:

$$m+n=-\frac{(-(m-۲))}{۱}\Rightarrow\cancel{m}+n=\cancel{m}-۲\Rightarrow n=-۲$$

از طرفی حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ می‌باشد، پس:

$$mn=\frac{n-۴}{۱}\Rightarrow mn=n-۴\xRightarrow{n=-۲}mn=-۲-۴\Rightarrow mn=-۶$$

۹۶ **۴**

می‌دانیم در معادلهٔ درجهٔ دوم مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، پس در معادلهٔ $x^۲+(m+۲)x+۲n=۰$ که m و n ریشه‌های آن هستند، داریم:

$$mn=\frac{۲n}{۱}\Rightarrow m\cancel{n}=۲\cancel{n}\Rightarrow m=۲$$

$$m+n=-\frac{m+۲}{۱}\xrightarrow{m=۲}۲+n=-\frac{۲+۲}{۱}$$

$$\Rightarrow ۲+n=-۴\Rightarrow n=-۴-۲\Rightarrow n=-۶$$

بنابراین مقدار $\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{-۶}=\frac{-۳+۱}{-۶}=\frac{-۲}{-۶}=\frac{۱}{۳}$$

۹۷ **۲**

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱+x_۲=-۲+۶=-(\frac{a-b}{۱})\Rightarrow ۴=-a+b$$

$$x_۱x_۲=-۲\times ۶=\frac{۳a+۴b-۷}{۱}\Rightarrow -۱۲=۳a+۴b-۷$$

$$\Rightarrow ۳a+۴b=-۱۲+۷\Rightarrow ۳a+۴b=-۵$$

حال از دستگاه $\begin{cases}-a+b=۴\\ ۳a+۴b=-۵\end{cases}$ مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$۳\times\begin{cases}-a+b=۴\\ ۳a+۴b=-۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۳a+۳b=۱۲\\ ۳a+۴b=-۵\end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} ۷b=۷\Rightarrow b=۱\Rightarrow ۳a+۴(۱)=-۵$$

$$\Rightarrow ۳a=-۵-۴=-۹\Rightarrow a=\frac{-۹}{۳}=-۳\Rightarrow b=۱$$

بنابراین $-۳=\frac{-۳}{۱}=\frac{a}{b}$ می‌باشد.

۹۸ **۲**

معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۴(x^۲+x)+۳=۰$ که درجهٔ دوم نیست. امّا اگر $x^۲+x=t$ باشد به یک معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب t تبدیل می‌شود:

$$x^۲+x=t\Rightarrow t^۲-۴t+۳=۰\xrightarrow[۱+۳+(-۴)=۰]{a+c+b=۰}t=۱\,,\,t=۳$$

حال $x^۲+x$ را یک بار برابر ۱ و بار دیگر برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$t=۱\Rightarrow x^۲+x=۱\Rightarrow x^۲+x-۱=۰\Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$

$$t=۳\Rightarrow x^۲+x=۳\Rightarrow x^۲+x-۳=۰\Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها}=\frac{-۳}{۱}=-۳$$

بنابراین حاصل‌ضرب همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۴(x^۲+x)+۳=۰$ برابر $۳=(-۳)\times(-۱)$ است.

حواست هست که در هر دو معادلهٔ $x^۲+x-۱=۰$ و $x^۲+x-۳=۰$ دلتا بزرگ‌تر از صفره، چون a و c مختلف‌العلامت هستن. پس حاصل‌ضرب ریشه‌هاشون رو از $\frac{c}{a}$ به‌دست میاریم و خیالمون راحته که دوتا ریشه دارن.

۹۹ **۲**

معادلهٔ $(x^۲-x)^۲-۱۴(x^۲-x)+۲۴=۰$ درجهٔ دوم نیست، امّا با فرض $x^۲-x=t$ به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود:

$$t^۲-۱۴t+۲۴=۰\Rightarrow(t-۲)(t-۱۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t-۲=۰\Rightarrow t=۲\\ t-۱۲=۰\Rightarrow t=۱۲\end{cases}$$

حال $x^۲-x$ را برابر tهای به‌دست آمده قرار می‌دهیم تا ریشه‌های معادلهٔ اصلی معلوم شوند:

$$x^۲-x=۲\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\xrightarrow{\Delta>۰}\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{-۱}{۱}=۱$$

$$x^۲-x=۱۲\Rightarrow x^۲-x-۱۲=۰\xrightarrow{\Delta>۰}\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{-۱}{۱}=۱$$

بنابراین مجموع همهٔ ریشه‌های معادله برابر $۱+۱=۲$ است.

۱۰۰ **۴**

ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$۳x^۲-۴mx+۲m-۳=۰\Rightarrow ۳m^۲-۴m(m)+۲m-۳=۰$$

$$\Rightarrow ۳m^۲-۴m^۲+۲m-۳=۰\Rightarrow -m^۲+۲m-۳=۰$$

چون مجموع مقادیر m را می‌خواهیم ممکن است بگوییم مجموع ریشه‌های معادله $-\frac{b}{a}$ است، پس:

$$\text{مجموع مقادیر } m=-\frac{۲}{-۱}=-(-۲)=۲$$

درحالی‌که اگر دقت کنید در معادلهٔ $-m^۲+۲m-۳=۰$، دلتا منفی است و معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، پس $x=m$ نمی‌تواند ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲-۴mx+۲m-۳=۰$ باشد.

۱۰۱ **۳**

ابتدا به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت $\frac{۶}{x_۱}+\frac{۶}{x_۲}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۶}{x_۱}+\frac{۶}{x_۲}=\frac{۶x_۲+۶x_۱}{x_۱x_۲}=\frac{۶(x_۱+x_۲)}{x_۱x_۲}$$

حال در معادلهٔ $۳x^۲-۲۱x-۱۴=۰$ داریم:

$$\begin{cases}x_۱+x_۲=-(\frac{-۲۱}{۳})=۷\\ x_۱x_۲=\frac{-۱۴}{۳}\end{cases}$$

بنابراین مقدار $\frac{۶(x_۱+x_۲)}{x_۱x_۲}$ برابر است با:

$$\frac{۶}{x_۱}+\frac{۶}{x_۲}=\frac{۶(x_۱+x_۲)}{x_۱x_۲}=\frac{۶\times ۷}{-\frac{۱۴}{۳}}=-\frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}\times\overset{۱}{\cancel{۷}}\times ۳}{\cancel{۱۴}}=-۹$$

۱۰۲ **۳**

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۴x-۳=۰$ باشند، مجموع معکوس ریشه‌ها $\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=\frac{x_۲+x_۱}{x_۱x_۲}$ است، پس:

در معادلهٔ $x^۲+۴x-۳=۰$ داریم:

$$\begin{cases}x_۱+x_۲=-\frac{۴}{۱}=-۴\\ x_۱x_۲=\frac{-۳}{۱}=-۳\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

۱۰۳ | ۱

ابتدا عبارت $(3x_1-2)(3x_2-2)$ را ساده می‌کنیم:

$$(3x_1-2)(3x_2-2)=9x_1x_2-6x_1-6x_2+4$$
$$=9x_1x_2-6(x_1+x_2)+4$$

حال در معادلهٔ $x^2-x-2=0$ داریم:

$$x_1x_2=\frac{-2}{1}=-2$$
$$x_1+x_2=-(\frac{-1}{1})=-(-1)=1$$

بنابراین مقدار $(3x_1-2)(3x_2-2)$ برابر است با:

$$(3x_1-2)(3x_2-2)=9x_1x_2-6(x_1+x_2)+4$$
$$=(9\times-2)-(6\times1)+4=-18-6+4=-20$$

۱۰۴ | ۲

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+6x-7=0$ باشند، مجموع مربعات ریشه‌ها $x_1^2+x_2^2$ است، چون: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ و از طرفی $x_1+x_2=-\frac{6}{2}=-3$ و $x_1x_2=-\frac{7}{2}$ است، پس:

$$x_1^2+x_2^2=(-3)^2-2(-\frac{7}{2})=9+7=16$$

۱۰۵ | ۴

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-6x-5=0$ باشند، مجموع مکعبات ریشه‌ها برابر $x_1^3+x_2^3$ است. پس:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

حال در معادله x_1+x_2 و x_1x_2 برابرند با:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-(\frac{-6}{3})=-(-2)=2\\ x_1x_2=\frac{-5}{3}\end{cases}$$

بنابراین حاصل $x_1^3+x_2^3$ برابر است با:

$$x_1^3+x_2^3=(2)^3-3(-\frac{5}{3})(2)=8+10=18$$

۱۰۶ | ۳

ابتدا عبارت $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_2+1+x_1+1}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}$$

حال x_1+x_2 و x_1x_2 را در معادلهٔ $x^2-4x-6=0$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-(\frac{-4}{1})=4\\ x_1x_2=\frac{-6}{1}=-6\end{cases}$$

بنابراین مقدار $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}$ برابر است با:

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=\frac{4+2}{-6+4+1}=\frac{6}{-1}=-6$$

۱۰۷ | ۲

ابتدا عبارت $(x_1-\frac{2}{x_2})(x_2+\frac{2}{x_1})$ را ساده می‌کنیم:

$$(x_1-\frac{2}{x_2})(x_2+\frac{2}{x_1})=x_1x_2+\cancel{x_1}\times\frac{2}{\cancel{x_1}}-\frac{2}{\cancel{x_2}}\times\cancel{x_2}-\frac{4}{x_1x_2}$$
$$=x_1x_2+2-2-\frac{4}{x_1x_2}=x_1x_2-\frac{4}{x_1x_2}$$

در معادلهٔ $x^2-6x+4=0$ مقدار x_1x_2 برابر $4=\frac{4}{1}$ است. پس:

$$x_1x_2-\frac{4}{x_1x_2}=4-\frac{4}{4}=4-1=3$$

۱۰۸ | ۱

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m+2)x+6=0$ باشند، داریم:

$$x_1x_2=\frac{6}{1}=6$$

از طرفی در صورت سؤال گفته‌شده یک ریشه، ۶ برابر ریشهٔ دیگر است، پس $x_1=6x_2$ می‌باشد. حال داریم:

$$\begin{cases}x_1x_2=6\\ x_1=6x_2\end{cases}\Rightarrow 6x_2\times x_2=6\Rightarrow 6x_2^2=6\Rightarrow x_2^2=1\Rightarrow x_2=\pm1$$

اگر $x_2=1$ باشد، آن‌گاه در معادله، $a+c+b=0$ است، پس:

$$1+6+(-(m+2))=0\Rightarrow 7-m-2=0\Rightarrow 5-m=0\Rightarrow m=5$$

همین‌جا مقدار مثبت m به دست آمد.

امّا اگر $x_2=-1$ باشد، در معادله، $a+c=b$ است، پس:

$$1+6=-(m+2)\Rightarrow 7=-m-2\Rightarrow -m=7+2\Rightarrow -m=9\Rightarrow m=-9$$

۱۰۹ | ۳

ابتدا در $x_1^2x_2+x_2^2x_1$ از x_1x_2 فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$x_1^2x_2+x_2^2x_1=45\Rightarrow \underbrace{x_1x_2}_{\frac{c}{a}}(\underbrace{x_1+x_2}_{-\frac{b}{a}})=45$$

$$\Rightarrow \frac{-(m^2-1)}{1}\times(-\frac{3}{1})=45\Rightarrow -(m^2-1)\times(-3)=45$$

$$\Rightarrow (m^2-1)=\frac{45}{3}=15\Rightarrow m^2=15+1=16\Rightarrow m=\pm4$$

بنابراین مقدار مثبت m برابر ۴ است.

۱۱۰ | ۲

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(m-4)x+27=0$ باشند، طبق صورت سؤال $x_1=x_2^2$ است. از طرفی x_1x_2 برابر $27=\frac{27}{1}$ است، پس:

$$x_1x_2=27\xRightarrow{x_1=x_2^2}x_2^2\times x_2=27\Rightarrow x_2^3=27=3^3\Rightarrow x_2=3$$

حال $x=3$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$3^2+(m-4)(3)+27=0\Rightarrow 9+3m-12+27=0$$
$$\Rightarrow 3m+24=0\Rightarrow 3m=-24\Rightarrow m=\frac{-24}{3}=-8$$

۱۱۱ | ۴

اگر $x_1^2x_2=8$ را به‌صورت $x_1\times x_1x_2=8$ بنویسیم، می‌توانیم به‌جای x_1x_2 مقدار $\frac{c}{a}$ را قرار دهیم. پس:

$$x^2+(a+2)x+4=0\Rightarrow x_1x_2=\frac{4}{1}=4$$

$$x_1\times x_1x_2=8\xRightarrow{x_1x_2=4}x_1\times4=8\Rightarrow x_1=\frac{8}{4}=2$$

می‌دانیم ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$2^2+(a+2)(2)+4=0\Rightarrow 2a+4+4+8=0$$
$$\Rightarrow 2a+12=0\Rightarrow 2a=-12\Rightarrow a=\frac{-12}{2}=-6$$

۱۱۲ | ۱

ابتدا در عبارت $\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3=7$ از $\alpha^2\beta^2$ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3=7\Rightarrow\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)=7\Rightarrow(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)=7$$

در معادلهٔ $x^2-7x+m-3=0$ داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-(\frac{-7}{1})=-(-7)=7\\ \alpha\beta=\frac{m-3}{1}=m-3\end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر به‌دست آمده در رابطهٔ $(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)=7$ داریم:

$$(m-3)^2\times7=7\Rightarrow(m-3)^2=\frac{7}{7}=1\Rightarrow m-3=\pm1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m-3=1\Rightarrow m=1+3\Rightarrow m=4\\ m-3=-1\Rightarrow m=-1+3\Rightarrow m=2\end{cases}$$

۱۱۳ | ۳

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3mx+81=0$ باشند، طبق صورت سؤال $x_1=3x_2^2$ است. از طرفی x_1x_2 برابر $\frac{c}{a}=\frac{81}{1}=81$ می‌باشد، پس:

$$x_1x_2=81\xrightarrow{x_1=3x_2^2}3x_2^2\times x_2=81$$

$$\Rightarrow3x_2^3=81\Rightarrow x_2^3=\frac{81}{3}=27\Rightarrow x_2^3=3^3\Rightarrow x_2=3$$

حال با قرار دادن $x=3$ در معادله داریم:

$$3^2-3m(3)+81=0\Rightarrow9-9m+81=0$$

$$\Rightarrow90-9m=0\Rightarrow9m=90\Rightarrow m=\frac{90}{9}=10$$

۱۱۴ | ۴

می‌دانیم $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است، پس در معادلهٔ $x^2-(a-3)x-a=0$ داریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{1}=2\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\Delta=8$$

حال داریم:

$$\Delta=8\Rightarrow(-(a-3))^2-4(1)(-a)=8$$

$$\Rightarrow a^2-6a+9+4a=8\Rightarrow a^2-2a+1=0\Rightarrow(a-1)^2=0$$

$$\Rightarrow a-1=0\Rightarrow a=1$$

۱۱۵ | ۱

از تساوی $x_1+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}$ داریم:

$$\frac{x_1}{1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{x_1x_2+1}{x_2}=\frac{1}{2}$$

می‌دانیم در معادلهٔ $3x^2+ax-6=0$ مقدار x_1x_2 برابر $\frac{c}{a}$ است، پس $x_1x_2=\frac{-6}{3}=-2$ می‌شود. حال با قرار دادن مقدار به‌دست آمده در تساوی $\frac{x_1x_2+1}{x_2}=\frac{1}{2}$ داریم:

$$\frac{-2+1}{x_2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{-1}{x_2}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}x_2=-2$$

می‌دانیم ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$3(-2)^2+a(-2)-6=0\Rightarrow12-2a-6=0\Rightarrow-2a+6=0$$

$$\Rightarrow-2a=-6\Rightarrow a=\frac{-6}{-2}=3$$

۱۱۶ | ۲

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-9x+3m+6=0$ باشند، تفاضل مربعات ریشه‌ها، یعنی $x_1^2-x_2^2$، بنابراین داریم:

$$x_1^2-x_2^2=27\xrightarrow{\text{مزدوج}}\underbrace{(x_1-x_2)}_{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}}\underbrace{(x_1+x_2)}_{\frac{-b}{a}}=27$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{1}\times(-\frac{-9}{1})=\sqrt{\Delta}\times9=27\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3\xrightarrow{\text{توان ۲}}\Delta=9$$

حال داریم:

$$\Delta=9\Rightarrow(-9)^2-4(1)(3m+6)=9\Rightarrow81-12m-24=9$$

$$\Rightarrow57-12m=9\Rightarrow57-9=12m\Rightarrow48=12m\Rightarrow m=\frac{48}{12}=4$$

۱۱۷ | ۴

ابتدا عبارت $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}=\frac{a-(a-1)}{a(a-1)}=\frac{1}{a(a-1)}=\frac{1}{a^2-a}$$

از طرفی چون $x=a$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2-x-3=0$ است، پس در معادله صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$a^2-a-3=0\Rightarrow a^2-a=3$$

بنابراین مقدار $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}$ برابر است با:

$$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2-a}=\frac{1}{3}$$

۱۱۸ | ۲

کافی است β را در معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ جای‌گذاری کنیم، در این صورت $\beta^2-5\beta+2=0$ خواهد بود. پس داریم:

$$\beta^2-5\beta+2=0\Rightarrow\beta^2=5\beta-2\xrightarrow{\times\beta}\beta^3=5\beta^2-2\beta$$

بنابراین عبارت $\alpha^3+5\beta^2-2\beta$ به رابطهٔ $\alpha^3+\beta^3$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

حال در معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ داریم:

$$\alpha+\beta=-(\frac{-5}{1})=5,\ \alpha\beta=\frac{2}{1}=2$$

بنابراین حاصل $\alpha^3+5\beta^2-2\beta$ برابر است با:

$$\alpha^3+5\beta^2-2\beta=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=5^3-3\times2\times5=125-30=95$$